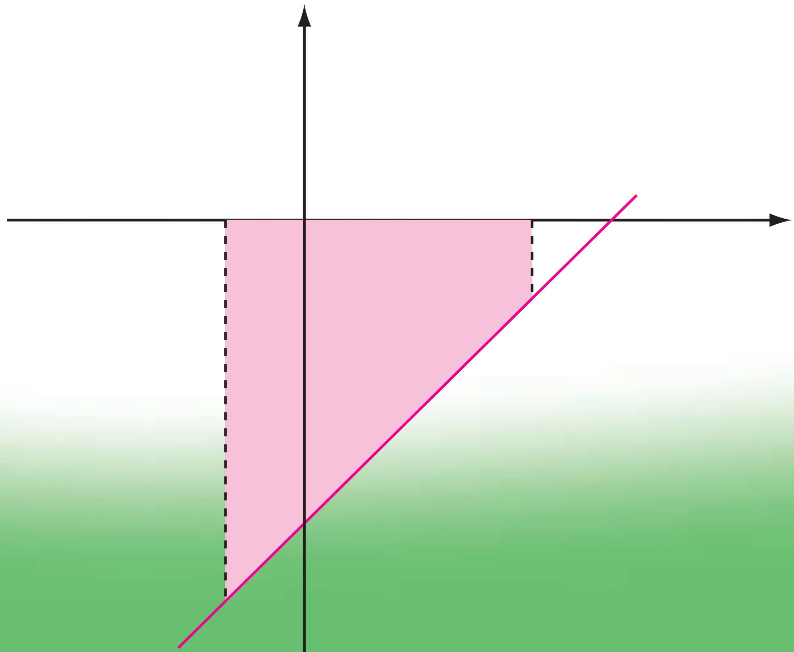
الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

(القسم الأدبي)



الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

الرياضيات

للصف الثالث الثانوي

القسم الأدبي

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش / رئيساً.

د. أمة الإله علي حُمد الحوري. أ. سالمين محمد باسلوم / منسقاً.
د. عوض حسين البكري. د. محمد علي مرشد.
د. محمد رشاد الكوري. أ. يحيى بكار مصفر.
د. محمد حسن عبده المسوري. أ. عبدالباري طه حيدر.
د. عبدالله سالم بن شحنة. أ. نصر محمد بدر.
د. عبدالرحمن محمد مرشد الجابري. أ. جميلة إبراهيم الرازحي.
أ. مريم عبدالجبار سلمان. أ. عادل علي مقبل البنا.
أ. يحيى محمد الكنز. أ. عبدالرحمن عبدالله عثمان.

فريق المراجعة والتطوير:

د/ أمة الآله علي حُمد الحوري. أ/ أحمد عائش عبدالله الحيمي.
أ/ عبدالحكيم حسن السفياني. أ/ شرف عثمان الخامري.
أ/ يحيى محمد الكنز. أ/ عارف سيف الشرعبي.
أ/ جميلة إبراهيم الرازحي. أ/ حميد الرومي.

الإخراج الفني

صف طباعي وتصميم وإخـــراج: جلال سلطان علي.

أشرف على التصميم: حامد عبدالعالم الشيباني.

١٤٣٥هـ / ٢٠١٤م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي   رددیه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ   وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي   أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذِمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس   اُخْلُدِي خَافِقَةً في كل قِمَّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي   واذخُرِيني لَكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبِّي أُمميًّا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

أعضاء اللجنة العليا للمناهج

أ. د. عبدالرزاق يحيى الأشول.

د. عبدالله عبده الحامدي.	أ/ علي حسين الحيمي.
د/ صالح ناصر الصوفي.	د/ أحمد علي المعمري.
أ.د/ محمد عبدالله الصوفي.	أ.د/ صالح عوض عرم.
أ/ عبدالكريم محمد الجنداري.	د/ إبراهيم محمد الحوثي.
د/ عبدالله علي أبو حورية.	د/ شكيب محمد باجرش.
د/ عبدالله لملس.	أ.د/ داوود عبدالملك الحدابي.
أ/ منصور علي مقبل.	أ/ محمد هادي طواف.
أ/ أحمد عبدالله أحمد.	أ.د/ أنيس أحمد عبدالله طائع.
أ.د/ محمد سرحان سعيد المخلافي.	أ/ محمد عبدالله زبارة.
أ.د/ محمد حاتم المخلافي.	أ/ عبدالله علي إسماعيل.

د/ عبدالله سلطان الصلاحي.

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقديم

في اطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية .

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية د يناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات .

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعد يلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً ، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصاد ر أهمها : الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي .

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها .

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهد افها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحد يث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية .

أ.د . عبدالرزاق يحيى الأشول

وزير التربية والتعليم

رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمــــة

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم المرسلين وآله وصحبه وسلم .

إن إعـادة النظـر فـي مناهـج الرياضيات، وكتبها المدرسية أمر ضروري تحتمه مواكبة التطور العلمي، وتحديث تربويات الرياضيات إضافة إلى مسايرة التغيرات الاجتماعية .

واستجابة لذلك يأتي هذا الكتاب « كتاب الرياضيات للصف الثالث الثانوي القسم الأدبي » كحلقة ضمن سلسـلة متكاملة على مرحلتين: الأساسية (١–٩) والثانوية من (الأول الثانوي إلى الثالث الثانوي) .

لقد عُرضت مواضيع الكتاب في تماسك وتكامل، وفق تسلسل علمي ونفسي تربوي ومراعاة للفروق الفردية،وتم تقديم المادة الدراسية بأسلوب سَلِسٍ واضح لا غموض فيه ولا تعقيد؛ حيث أوردنا قدراً كافياً من الأمثلة بعد العرض النظري وأتبعنا ذلك بعددٍ من التمارين والمسائل آملين إتاحة فرص كثيرة للتعامل مع المادة ليكون الطالب محور التعلم معتمداً على النشاط بدافع ذاتي محققاً بذلك الأهداف الوجدانية .

واتساقاً مع كتاب الصف الثاني الثانـوي (القسم الأدبي) والمواد المرافقة له؛ فإن هذا الكتـاب وما يرافقه مـن كتاب التمارين ، ودليل المعلم يهتم اهتماماً كبيراً بالمفاهيم الأساسية إلى جانب تقديمه معارف سليمة ومراعاته انسجام الموضوعات مع عمليات التعلم الطبيعي للطلبة كما يحفـز المدرسـين على ابتكار أساليب تدريس جديدة بما يضمن لطلبتهم تعلماً فاعلاً .

إن الاهتمام بالرياضيات في القسم الأدبي يُعد اتجاهاً حديثاً وهاماً في عصرنا الحاضر ؛ لما تمثله الرياضيات من أداة علمية لفهم الكثير من الظواهر العلمية والإنسانية ، وهذا ما يخدم تحقيق الأهداف العامة للتربية والتعليم في بلدنا .

ومن أهم أهداف وزارة التربية والتعليم أن يظل التطوير في نمو وتطور مستمرين ، بمتابعة كل جديد في تدريس الرياضيات وهذا لايتأتى إلا بالاستفادة من واقع التطبيق في الميدان التدريسي . فإذا راعينا كل المبادئ المذكورة أعلاه بقدر ما وفقنا المولى عز وجل بإعداد هذه المواد التربوية في ضوء إستراتيجيات تهدف إلى تقـديم الأجـود (مادة وطريقة)؛ فإننا ننظر بشوق بالغ أن يوافينا ذووالعلاقة بملاحظاتهم بغية الاستفادة منها .

نسأل المولى العلي القدير أن نكون قد وفقنا في كل ما نصبو إليه فهو ولي التوفيق والهادي إلى سواء السبيل .

المؤلفون

المحتويات

الموضوع	الصفحة
الوحدة الأولى – مبدأ العد	٦
١ – ١ مبدأ العدّ	٦
١ – ٢ التباديل	١١
١ – ٣ التوافيق	١٦
الوحدة الثانية – الإحصاء	٢٤
٢ – ١ مراجعة	٢٤
٢ – ٢ الارتباط وأشكال الانتشار	٣٤
٢ – ٣ الانحدار	٤٤
الوحدة الثالثة – التكامل	٥٠
٣ – ١ التكامل غير المحدد	٥٠
٣ – ٢ التكامل المحدد	٥٥
٣ – ٣ تطبيقات التكامل في المساحات	٥٩

١ – ١ مبـــدأ العـــــد

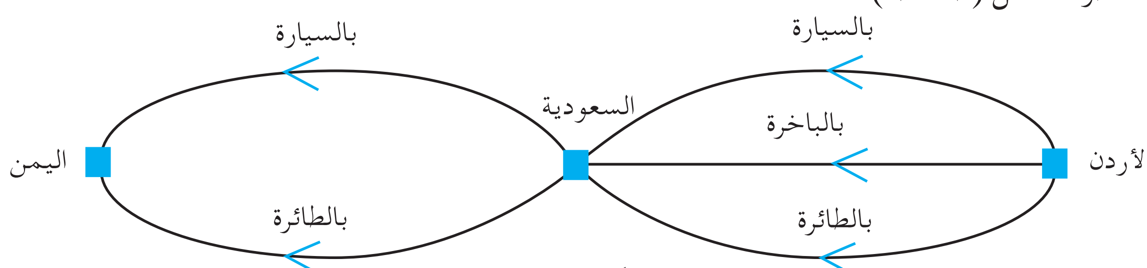
العد من المهارات الأساسية والضرورية في حياتنا ، ولذلك فقد اهتم العلماء منذ القدم بهذه المهارات، وأوجدوا لها قواعد وقوانين تسهل معرفة الجواب بأقل جهد، وأقصر وقت .

ونتعرف في هذا البند على بعض الأساليب التي تسهل عملية العد للمجموعات الكثيرة العناصر .

لنأخذ مثالا مبسطاً لتوضيح كيفية إجراء عملية العد :

أراد رجل أن يسافر من الأردن إلى اليمن ماراً بالسعودية فإذا كان بإمكانه أن ينتقل من الأردن إلى السعودية بثلاث طرق هي : بالسيارة أو بالباخرة أو بالطائرة ومن السعودية إلى اليمن بطريقتين هما : بالسيارة أو بالطائرة . فبكم طريقة يمكنه أن ينتقل من الأردن إلى اليمن .

انظر الشكل (١ – ١) .



شكل (١ – ١)

الجدول (١–١) يوضح الطرق المختلفة للانتقال من الأردن إلى اليمن

من الأردن إلى السعودية	من السعودية إلى اليمن	من الأردن إلى اليمن
سيارة	سيارة	(سيارة ، سيارة)
	طائرة	(سيارة ، طائرة)
باخرة	سيارة	(باخرة ، سيارة)
	طائرة	(باخرة ، طائرة)
طائرة	سيارة	(طائرة ، سيارة)
	طائرة	(طائرة ، طائرة)

لاحظ أن كل اختيار لوسيلة انتقال من الأردن إلى السعودية يتبعه اختياران للانتقال من السعودية إلى اليمن.

إذن عدد طرق الخيارات الممكنة للانتقال من الأردن إلى اليمن = ٣ × ٢ = ٦ طرق

أي أن عدد الخيارات في المرحلة الأولى مضروبة في عدد الخيارات في المرحلة الثانية .

مثال (١ - ١)

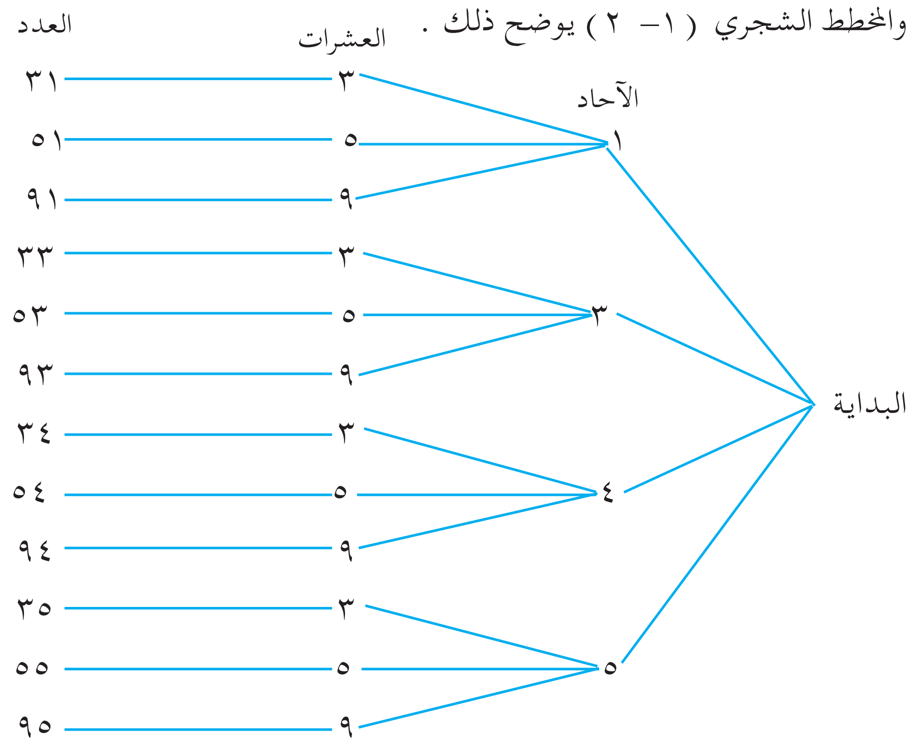
كم عدداً مؤلفاً من رقمين إذا كان رقم آحاده أحد عناصر المجموعة
س = { ١ ، ٣ ، ٤ ، ٥ } ، ورقم عشراته أحد عناصر المجموعة ص = { ٣ ، ٥ ، ٩ } ؟

الحل :

يمكن اختيار رقم منزلة الآحاد بأربع طرق وذلك باختيار رقم من الأرقام الأربعة المعطاة في س ، ويمكن اختيار رقم منزلة العشرات بثلاث طرق باختيار رقم من الأرقام المعطاة في ص .

وبذلك يكون عدد الأعداد المراد تكوينها = ٤ × ٣ = ١٢ عدداً .

والمخطط الشجري (١- ٢) يوضح ذلك .



شكل (١ - ٢)

تدريب (١ - ١)

محل تجاري له أربعة أبواب فإذا أراد شخص دخول هذا المحل من أحد هذه الأبواب الأربعة، وأن يخرج من باب آخر غير الذي دخل منه ، فكم عدد الطرق الممكنة لذلك موضحاً ذلك بمخطط شجري ؟

مما سبق نجد أنه إذا تمت عملية من خطوتين مستقلتين ، أي إذا كان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى ن وعدد طرق إجراء الخطوة الأخرى م ؛ فإن : عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية كاملة هو ن × م .

ويعمم أسلوب عدد الطرق الممكنة في قاعدة عامة تسمى المبدأ الأساسي للعد :

إذا تكونت عملية من م مرحلة مستقلة

وكان عدد طرق إجراء الخطوة الأولى $د_١$ ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثانية $د_٢$ ، وعدد طرق إجراء الخطوة الثالثة $د_٣$ ، ... ، وعدد طرق إجراء الخطوة الأخيرة $د_م$ ؛

فإن عدد الطرق الممكنة لإجراء العملية كاملة = $د_١ \times د_٢ \times د_٣ \times ... \times د_م$.

مثال (١ - ٢)

بكم طريقة يمكن لخمسة أشخاص الجلوس على خمسة مقاعد متجاورة ؟

الحـــل :

عدد طرق جلوس الشخص الأول = ٥ طرق .

عدد طرق جلوس الشخص الثاني = ٤ طرق .

عدد طرق جلوس الشخص الثالث = ٣ طرق .

عدد طرق جلوس الشخص الرابع = طريقتان .

عدد طرق جلوس الشخص الخامس = طريقة واحدة .

وحسب مبدأ العد فإن :

عدد الطرق التي يجلس بها الأشخاص على المقاعد الخمسة = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ١٢٠ طريقة .

نلاحظ أن : ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ هو حاصل ضرب عوامل صحيحة عددها ٥ ، وأكبرها ٥ ؛ وكل عامل فيه يصغر عن سابقه بمقدار ١ ، وآخر عامل فيه هو ١ .

ويرمز له بالرمز لـ٥ (ويقرأ مضروب ٥) ؛

أي أن لـ٥ = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ .

وبشكل عام يمكن تعريف مضروب د على النحو الآتي :

تعريف (١ - ١)

لـد = د (د - ١) (د - ٢) × ... × ٣ × ٢ × ١ ، د $\in$ $ط_+$.

ونصطلح على أن مضروب الصفر هو الواحد أي : لـ٠ = ١ .

مثال (١ - ٣)

احسب قيمة الآتي : أ) لـ٧ ب) لـ٥ - لـ٣ جـ) $\frac{لـ٦}{لـ٤ \; لـ٢}$.

الحـــل :

أ) ل٧ = ٧ × ٦ × ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٥٠٤٠

ب) ل٥ − ل٣ = ٥ × ٤ ل٣ − ل٣ = ل٣ (٥ × ٤ − ١) = ل٣ (٢٠ − ١) = ١٩ ل٣
= ١٩ × ٣ × ٢ × ١ = ١١٤ .

جـ) $\frac{\text{ل٦}}{\text{ل٤ ل٢}} = \frac{\cancel{٦}^{٣} \times ٥ \; \cancel{\text{ل٤}}}{\cancel{٢} \times ١ \; \cancel{\text{ل٤}}} = ١٥$.

مثال (١ − ٤)

أوجد قيمة ن في كل مما يأتي : أ) لن = ٥٠٤٠ . ب) ٣ لن = ٣٦٠ .

الحـــل :

أ) لن = ٥٠٤٠ .

لن هو حاصل ضرب عوامل متتالية أصغرها ١ وأكبرها ن ، ولإيجاد قيمة ن نقسم ٥٠٤٠ على ١ ، ثم على ٢ ، ثم نقسم خارج القسمة على ٣ ... وهكذا .

نلاحظ أن : ٥٠٤٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥ × ٦ × ٧ = ل٧ .

لن = ل٧ $\Leftarrow$ ن = ٧

ب) ٣ لن = ٣٦٠ بقسمة الطرفين على ٣

لن = ١٢٠

لن = ٥ × ٤ × ٣ × ٢ × ١

∴ لن = ل٥ $\Leftarrow$ ن = ٥ .

مثال (١ − ٥)

يتكون مجلس إدارة إحدى المؤسسات من ستة أعضاء ، فبكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب للرئيس وأمين للسر من بين أعضاء المجلس ؟

الحـــل :

يمكن أن يكون الرئيس أي عضو من الأعضاء الستة ، وعليه يكون عدد طرق اختيار الرئيس = ٦ طرق .

ولاختيار نائب الرئيس يمكن أن يكون أي عضو من الخمسة الأعضاء الباقين بعد اختيار الرئيس، فيكون عدد طرق اختيار النائب = ٥ طرق

ولاختيار أمين السر يمكن أن يكون أي عضو من الأعضاء الأربعة الباقين بعد اختيار الرئيس ونائبه ، فيكون عدد طرق اختياره = ٤ طرق .

وحسب مبدأ العد فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار الرئيس ونائبه وأمين السر = ٦ × ٥ × ٤ = ١٢٠ طريقة .

مثال (١ - ٦)

كم طريقة لعدد مكون من رقمين يمكن تكوينه من الأرقام ١ ، ٣ ، ٤ ، ٦ ، ٩ ، وذلك في الحالتين الآتيتين:

أ) بدون تكرار الأرقام .   ب) مع تكرار الأرقام .

الحـــل :

أ) يمكن ملئ خانة (منزلة) الآحاد بخمس طرق ، ومنزلة العشرات بأربع طرق .

إذن عدد طرق تكوين الأعداد = ٥ × ٤ = ٢٠ طريقة .

ب) يمكن ملئ منزلة الآحاد بخمس طرق ، منزلة العشرات بخمس طرق أيضاً .

إذن عدد طرق تكوين الأعداد = ٥ × ٥ = ٢٥ طريقة .

تمارين ومسائل (١ - ١)

[١] ألقيت قطعة نقود مرتين، ما عدد النتائج الممكنة ؟

[٢] ألقي حجر نرد مرتين ، ما عدد النتائج الممكنة لذلك ؟ وضح ذلك بمخطط شجري .

[٣] كم عدداً مؤلفاً من ثلاثة أرقام يمكن تشكيلها من مجموعة الأرقام { ١ ، ٢ ، ٣ } .

أولاً: مع تكرار الأرقام ، ثانياً: بدون تكرار؟

[٤] يتكون مجلس إدارة مدرسة من خمسة أعضاء ، فبكم طريقة يمكن اختيار مدير ، ووكيل ، ومسئول مالي؟

[٥] لدينا ثلاثة أنواع من التلفزيونات ونوعان من الفيديوهات، أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار تلفزيون وفيديو؛ موضحاً ذلك بالمخطط الشجري .

[٦] دُعي عشرة ضيوف للجلوس على عشرة مقاعد موضوعة في صف واحد ، فبكم طريقة يمكن تنظيم جلوسهم؟

[٧] بكم طريقة يمكن أن يستخدم ٥ أشخاص في آن واحد أجهزة الهاتف في مقسم يحتوي عشرة خطوط ؟

[٨] كم عدداً مؤلفاً من رقمين يمكن تشكيله من مجموعة الأرقام التالية مع إمكانية التكرار :

أ) { ٢ ، ٤، ٦ }   ب) { ٠ ، ٢ ، ٥ ، ٧ }

[٩] كم عدداً يمكن تكوينه من المجموعة { ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ } بحيث يتكون كل منها من ثلاثة أرقام مختلفة ويكون أكبر من ٣٠٠ .

[١٠] ما عدد أرقام الهاتف الخماسية التي يمكن تبدأ بالرقم ٢ أو ٣ ؟

[١١] يحوي أحد الرفوف في المكتبة على ١٠ كتب عربية ، ٨ كتب إنجليزية ، فبكم طريقة يستطيع أحد الأشخاص اختيار كتابين أحدهما بالعربية والآخر بالإنجليزية ؟

[١٢] بكم طريقة يمكن إهداء طالب متفوق كتابين أحدهما في الرياضيات والآخر في العلوم مختارة من خمسة كتب في الرياضيات و ثلاثة كتب في العلوم ؟

[١٣] بكم طريقة يمكن أن يجلس ٦ أشخاص على ٨ مقاعد موضوعة في صف ؟

[١٤] أوجد قيمة المتغير في كل مما يأتي (حل المعادلات التالية) :

أ) $\underline{لـ^{د}}$ = ٤٠٣٢٠ .   ب) ٥ $\underline{لـ^{د}}$ = ٣٦٠٠ .

جـ) ٣٠ $\underline{لـ^{س}}$ = $\underline{لـ^{س+٢}}$.

١ – ٢ التباديل

أولا- تباديل د من العناصر :

مثال تمهيدي :

إن عدد الطرق الممكنة للحصول على عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة من المجموعة س = { ١ ، ٣ ، ٦ } يمكن معرفتها كما يلي :

عدد طرق اختيار رقم الآحاد = ٣ طرق .

عدد طرق اختيار رقم العشرات = ٢ (طريقتان) .

عدد طرق اختيار رقم المئات = ١ (طريقة واحدة).

وباستخدام المبدأ الأساسي للعد فإن :

عدد طرق الحصول على عدد مكون من ثلاثة أرقام مختلفة = ٣ × ٢ × ١ = ٦ طرق، والأعداد المختلفة الممكنة هي : ٦٣١ ، ٦١٣ ، ٣١٦ ، ٣٦١ ، ١٦٣ ، ١٣٦ . والأعداد مختلفة بسبب تغير قيمة العدد بتغير منزلة أي من أرقامه .

يسمى كل ترتيب حصلنا عليه للأرقام السابقة (تبديلة) أي أن عدد تباديل الأرقام الثلاثة السابقة يساوي ٣ × ٢ × ١ = ٦ تبديلات أي تساوي $\underline{لـ^{٣}}$.

وبالمثل إذا كان عدد عناصر المجموعة (س) ٤ عناصر فإن عدد التباديل الممكنة للحصول على عدد مكون من أربعة أرقام مختلفة منها = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = $\underline{لـ^{٤}}$ = ٢٤ تبديلة .

تعريف (١ – ٢)

عدد تباديل د من العناصر مأخوذة جميعاً في كل مرة هو $\underline{لـ^{د}}$ ؛

ويرمز له بالرمز $ل^{د}_{د}$ أو ل (د ، د) حيث د ∈ $ص_{+}$.

$ل^{د}_{د}$ = $\underline{لـ^{د}}$ = د (د – ١) (د – ٢) ... × ٣ × ٢ × ١ .

مثال (١ - ٧)

بكم طريقة يمكن أن تجلس أربع طالبات على أربعة كراسي ؟

الحـــــل :

عدد الطرق التي يمكن أن تجلس بها الطالبة الأولى أربع طرق ، والثانية ثلاث طرق ، . . .وهكذا .

أي أن عدد الطرق = $^{٤}ل_{٤}$ = ٤ × ٣ × ٢ × ١ = ٢٤ طريقة .

ثانيا : تباديل ن من العناصر المختلفة مأخوذة ر في كل مرة :

في كثير من الأحيان نحتاج إلى اختيار وترتيب عدد معين من عناصر مجموعة ما ، كأن نختار مثلاً ر عنصراً من مجموعة بها ن عنصراً ، ثم نرتب هذه العناصر المختارة .

والسؤال هو : ما عدد الطرق التي يمكننا بها القيام بمثل هذه العملية ؟ وللإجابة عن هذا السؤال فإننا نوضح ذلك على النحو التالي :

إذا كان لدينا أربعة أرقام ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ وأردنا أن نكون منها أعداد ذات رقمين مختلفين فإن :

عدد طرق ملء منزلة الآحاد ٤ طرق ، وعدد طرق ملء منزلة العشرات ٣ طرق .

وحسب مبدأ العد يكون :

عدد الأعداد ذات الرقمين التي يمكن تكوينها من الأرقام الأربعة = ٤ × ٣ = ١٢ عدداً ، كل عدد من هذه الأعداد الإثنى عشر يسمى تبديلاً لأربعة عناصر مأخوذة منها اثنين اثنين (أي أننا أجرينا تبديلا على أربعة عناصر مأخوذة مثنى مثنى) ونرمز لذلك بالصورة $^{٤}ل_{٢}$ وتقرأ (٤ لام ٢) ويقصد بها ٤ تبديل ٢ ، أي :

$^{٤}ل_{٢}$ = ٤ × ٣ .

وبشكل عام فإن : $\boxed{^{ن}ل_{ر} = ن (ن - ١) (ن - ٢) \ldots (ن - ر + ١) .}$ . . . . . (١ - ١)

أي أن : $^{ن}ل_{ر}$ تعني حاصل ضرب أعداد متتالية أكبرها ن ، وعددها ر ، وأصغرها يزيد واحد عن الفرق بين ن ، ر أي هو (ن - ر + ١) .

فمثلا : $^{٨}ل_{٥}$ = حاصل ضرب أعداد متتالية أكبرها ٨ وعددها ٥ .

أي أن : $^{٨}ل_{٥}$ = ٨ × ٧ × ٦ × ٥ × ٤ [لاحظ أن العامل الأخير = ٤ = (٨ - ٥ + ١)] .

ويمكن التعبير عن $^{ن}ل_{ر}$ باستخدام المضروب على النحو التالي :

$$^{ن}ل_{ر} = \frac{ن (ن - ١) (ن - ٢) \ldots (ن - ر + ١) (ن - ر) (ن - ر - ١) \ldots × ٣ × ٢ × ١}{(ن - ر) (ن - ر - ١) \ldots × ٣ × ٢ × ١}$$

أي بضرب البسط والمقام في $\underline{| ن - ر}$.

$$\boxed{^{ن}ل_{ر} = \frac{\underline{| ن}}{\underline{| ن - ر}} \quad \text{حيث } ن ، ر \in ص_{+} ، ن \geq ر}$$ . . . . (١ - ٢)

مثال (١ - ٨)

أوجد قيمة الآتي :

$ل^{٤}_{٢}$ ، $ل^{ن}_{٠}$ ، $ل^{١٢}_{٤}$ ، $ل^{١٠٠}_{٢}$

الحـــل :

$$ل^{٤}_{٢} = \frac{\lfloor\underline{٤}}{\lfloor\underline{٤-٢}} = \frac{٤ \times ٣ \times \lfloor\underline{٢}}{\lfloor\underline{٢}} = ١٢ \quad ، \quad ل^{ن}_{٠} = \frac{\lfloor\underline{ن}}{\lfloor\underline{ن-٠}} = \frac{\lfloor\underline{ن}}{\lfloor\underline{ن}} = ١$$

$$ل^{١٢}_{٤} = \frac{\lfloor\underline{١٢}}{\lfloor\underline{١٢-٤}} = \frac{\lfloor\underline{١٢}}{\lfloor\underline{٨}} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \,\cancel{\lfloor\underline{٨}}}{\cancel{\lfloor\underline{٨}}} = ١١٨٨٠ \text{ ،}$$

$$ل^{١٠٠}_{٢} = \frac{\lfloor\underline{١٠٠}}{\lfloor\underline{٩٨}} = \frac{١٠٠ \times ٩٩ \,\cancel{\lfloor\underline{٩٨}}}{\cancel{\lfloor\underline{٩٨}}} = ٩٩٠٠ \text{ .}$$

مثال (١ - ٩)

أوجد قيمة الرمز المجهول في كل مما يأتي :

أ) $ل^{ن}_{٢} = ٥٦$.   ب) $ل^{ن-٢}_{٣} = ٢٤$.   جـ) $ل^{١٣}_{ر} = ١٧١٦٠$.

الحـــل :

أ) $ل^{ن}_{٢} = ٥٦ \Leftarrow ن(ن - ١) = ٥٦$

$\therefore ن^{٢} - ن = ٥٦ \Leftarrow ن^{٢} - ن - ٥٦ = ٠$

$\Leftarrow (ن - ٨)(ن + ٧) = ٠$

اما $ن = ٨$ أو $ن = -٧$ وهذا مرفوض لأنه سالب .

$\therefore ن = ٨$.

ب) $ل^{ن-٢}_{٣} = ٢٤$

$\because ل^{ن-٢}_{٣} = ٤ \times ٣ \times ٢ \Leftarrow ل^{ن-٢}_{٣} = ل^{٤}_{٣}$

$\Leftarrow ن - ٢ = ٤$

$\therefore ن = ٦$

جـ) $ل^{١٣}_{ر} = ١٧١٦٠$ ؛ نوجد العوامل المتتالية التي أكبرها ١٣ ، ويكون حاصل ضربها = ١٧١٦٠ ، لذلك نقسم ١٧١٦٠ على ١٣ ، ثم نقسم خارج القسمة على ١٢ ، ثم نقسم خارج القسمة على ١١ ، ... وهكذا حتى يكون ناتج خارج قسمة يساوي واحد .

فنحصل على $^{١٣}ل_{ر} = ١٧١٦٠ = ١٣ \times ١٢ \times ١١ \times ١٠$ $\Leftarrow$ $^{١٣}ل_{ر} = {}^{١٣}ل_{٤}$

$\therefore$ ر $= ٤$.

مثال (١ – ١٠)

بكم طريقة يمكن تكوين علم يتكون من ثلاثة ألوان إذا كان لدينا خمسة ألوان ؟

الحـــل :

عدد الطرق $= {}^{٥}ل_{٣} = ٥ \times ٤ \times ٣ = ٦٠$ طريقة .

مثال (١ – ١١)

ما عدد تباديل جلوس ٥ أشخاص حول طاولة مستديرة ؟

الحـــل :

عدد تباديل جلوس خمسة أشخاص حول طاولة مستديرة $= \underline{|٥ - ١} = \underline{|٤} = ٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ = ٢٤$ تبديلة .

إن عدد تباديل مجموعة ذات ن عنصراً حول أي شكل مغلق (مستدير) هو $\underline{|ن - ١}$ ، لأنه لم يتم تثبيت نقطة البداية .

مثال (١ – ١٢)

صف به خمسة وعشرون طالباً بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة طلابية مؤلفة من رئيس ونائب للرئيس، وأمين صندوق، ومسئول ثقافي، ومسئول رياضي ؟

الحـــل :

عدد الطرق $= {}^{٢٥}ل_{٥} = \dfrac{\underline{|٢٥}}{\underline{|٢٥ - ٥}} = \dfrac{\underline{|٢٥}}{\underline{|٢٠}} = \dfrac{٢٥ \times ٢٤ \times ٢٣ \times ٢٢ \times ٢١ \, \cancel{\underline{|٢٠}}}{\cancel{\underline{|٢٠}}} = ٦٣٧٥٦٠٠$ طريقة .

تمارين ومسائل (١ – ٢)

[١] احسب قيمة الآتي : ${}^{٧}ل_{٢}$ ، ${}^{٥}ل_{.}$ ، $\dfrac{{}^{٥}ل_{٣}}{{}^{٨}ل_{٥}}$ ، ${}^{٧}ل_{٢}{}^{٣} \times {}^{٧}ل_{٤}$ ، ${}^{٩}ل_{٩}$.

[٢] عبر عن كل مما يأتي بالشكل ${}^{ن}ل_{ر}$:

أ) $٧ \times ٥ \times ٦ \times ٣ \times ٤$.　　ب) ١٢٠ .　　جـ) ٢١٠ .

د) ن (ن^{٢} – ٣ن + ٢) .　　هـ) (ن – ٢) (ن – ٣) (ن – ٤) (ن – ٥) .

[٣] أوجد قيمة ه في كل مما يأتي :

أ) $^{ه}ل_{ه} = ٧٢٠$. ب) $^{ه}ل_{٤} = ٣\ {}^{ه}ل_{٣}$.

جـ) $١٤\ {}^{ه-٢}ل_{٣} = {}^{ه}ل_{٤}$. د) $\frac{{}^{٢ه+١}ل_{ه-١}}{{}^{٢ه-١}ل_{ه}} = \frac{٣}{٥}$.

[٤] اثبت صحة الآتي :

أ) $\frac{\lfloor\underline{ه+٣}}{\lfloor\underline{ه}} = (ه+٣)\ {}^{ه+٢}ل_{٢}$. ب) $^{ه+١}ل_{ر+١} = (ه+١)\ {}^{ه}ل_{ر}$.

جـ) $^{ه}ل_{ر} \div {}^{ه-١}ل_{ر-١} = ه$. د) $^{ه-١}ل_{ر} + ر\ {}^{ه-١}ل_{ر-١} = {}^{ه}ل_{ر}$.

[٥] أوجد $^{٣ه}ل_{٥}$ إذا كان $\lfloor\underline{ه} = ٢٤$.

[٦] إذا كان $^{٩}ل_{ر} = ٦٠٤٨٠$ ، فأوجد $\lfloor\underline{ر}$.

[٧] بكم طريقة يمكن ترتيب خمسة كتب على رف فيه ثلاث خانات فارغات ؟

[٨] كم عدداً مكوناً من أربعة أرقام مختلفة يمكن تكوينه من الأرقام ٣ ، ٥ ، ٧ ، ٨ ؟

[٩] بكم طريقة يمكن تلوين علم يتكون من لونين إذا كان لدينا أربعة ألوان ؟

[١٠] حل المعادلات التالية :

أ) $س\ {}^{٥}ل_{٣} = {}^{٧}ل_{٥}$. ب) $^{س+٢}ل_{٣} = ٤٢س$.

جـ) $\lfloor\underline{س-٣}\ ({}^{س}ل_{٣}) = ٢٠\ \lfloor\underline{س-٢}$. د) $٣٠\ ({}^{س+٣}ل_{٣}) = {}^{س+٥}ل_{٥}$.

[١١] بكم طريقة يمكن ترتيب ٦ كتب مختلفة على أحد الرفوف؟ وبكم طريقة يمكن إجراء هذا الترتيب إذا كان المطلوب أن يظل كتابان معينان متجاوران؟

[١٢] بكم طريقة يمكن وضع ٨ شمعات ذات ألوان مختلفة في شمعدان يسع خمس شمعات فقط إذا كان :

أ) الشمعدان خطي ؟ ب) الشمعدان دائري ؟

[١٣] كم عدد التطبيقات المتباينة التي يمكن تعريفها من المجموعة $س = \{١ ، ٢ ، ٣\}$ إلى المجموعة $ص = \{أ ، ب ، جـ ، ء ، هـ\}$ ؟

١ - ٣ التـــوافيـــق

ليكن لدينا المجموعة صـ = {أ ، ب ، جـ ، ء} . من هذه المجموعة يمكن أن نستخرج فقط ست مجموعات جزئية ثنائية (يحتوي كل منها على عنصرين) وهي :
{أ ، ب} ، {أ ، جـ} ، {أ ، ء} ، {ب ، جـ} ، {ب ، ء} ، {جـ ، ء} .
كل من هذه المجموعات الجزئية تُسمى توفيقاً أو اختياراً ذات عنصرين من مجموعة عدد عناصرها أربعة .
كذلك يمكن أن نستخرج من هذه المجموعة مجموعات جزئية ثلاثية ، وهي أربع مجموعات جزئية :
{أ ، ب ، جـ} ، {أ ، ب ، ء} ، {أ ، جـ ، ء} ، {ب ، جـ ، ء} .
كل من هذه المجموعات الجزئية يسمى توفيقاً أو اختياراً ثلاثي العناصر من مجموعة رباعية .
وبصفة عامة إذا كان لدينا مجموعة سـ عدد عناصرها ن فإن كل مجموعة جزئية ذات ر عنصراً يسمى توفيقاً أو اختياراً ذا ر عنصراً؛ لعناصر عددها ن حيث (ر ≤ ن) .

تعريف (١ -٣)

توفيق ر عنصراً من مجموعة تضم (ن) عنصراً دون أهمية، للترتيب يسمى توفيقاً، ويرمز له بالرمز :
$^{ن}ق_{ر}$ أو $\binom{ن}{ر}$ أو ق (ن، ر) ويقرأ (نون توافيق راء).

والفرق بين التباديل والتوافيق هو أننا في التباديل نهتم بالترتيب لأننا لو أخذنا تباديل {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} مأخوذة اثنين اثنين سنجدها اثنا عشر تبديلاً: {١ ، ٢} ، {١ ، ٣} ، {١ ، ٤} ، {٢ ، ٣} ، {٢ ، ٤} ، {٣ ، ٤} ، {٢ ، ١} ، {٣ ، ١} ، {٤ ، ١} ، {٣ ، ٢} ، {٤ ، ٢} ، {٤ ، ٣} . ومن الملاحظ أن {١ ، ٢} ، {٢ ، ١} يعتبران تبديلين مختلفين ولكنهما يمثلان توفيقاً واحداً، لأن {١ ، ٢} هو نفسه {٢ ، ١}
وفي المسائل العملية نحتاج أحياناً إلى إيجاد التباديل إذا كان الترتيب مهماً ، وأحيانا نحتاج إيجاد التوافيق إذا كان الترتيب لايهمنا ، وذلك حسب واقع الحالة التي نعالجها .
ولإيجاد عدد توافيق ن من العناصر مأخوذة ر في كل مرة ، نوضح ذلك كالتالي :
من المجموعة سـ = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤} حصلنا على ١٢ تبديلاً، أخذت اثنين اثنين يقابلها ستة توافيق (كل تبديلين يحصل منهما على توفيق واحد)أي أن عدد التوافيق يمكن أن يستنتج من عدد التباديل بالقسمة على $\underline{|2}$

(أي $\frac{١٢ \text{ تبديلاً}}{٢}$ = ٦ توفيقاً ، والعدد ٢ هو في الحقيقة $^{٢}ل_{٢}$ = $\underline{|2}$ = ٢ × ١ = ٢) .

وبالمثل حصلنا على أربعة توافيق مأخوذة ثلاثة ثلاثة يقابلها ٢٤ تبديلة ($^{٤}ل_{٣}$) .

أي أن كل ست تبديلات يقابلها توفيق واحد $\frac{\text{24 تبديلاً}}{6} = 4$ توافيق ، والعدد ٦ ما هو في الحقيقة إلاّ تباديل ثلاثة عناصر فيما بينها أي أنه $ل^{3}_{3} = \underline{|3} = 3 \times 2 \times 1 = 6$.

وبصفة عامة كل توفيق (اختيار) من $ر$ عنصراً يقابلة تبديلة عددها ($\underline{|ر}$). لأن أي توفيقة منها تترتب عناصرها فيما بينها بطرق عددها $\underline{|ر}$.

$$\therefore \quad ق^{ن}_{ر} = \frac{ل^{ن}_{ر}}{\underline{|ر}} \quad . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1 - 3)$$

وهذه هي العلاقة بين عدد التباديل وعدد التوافيق

$$\because \quad ل^{ن}_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ن - ر}}$$

$$\therefore \quad ق^{ن}_{ر} = \frac{\underline{|ن}}{\underline{|ر} \times \underline{|ن - ر}} \quad . \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1 - 4)$$

مثال (١ – ١٣)

احسب قيمة الآتي :

أ) $ق^{6}_{2}$ ، ب) $ق^{8}_{0}$ ، جـ) $ق^{10}_{10}$ ، د) $ق^{60}_{15}$.

الحـــل :

أ) $ق^{6}_{2} = \frac{\underline{|6}}{\underline{|2} \times \underline{|6-2}} = \frac{\underline{|6}}{\underline{|2} \times \underline{|4}} = \frac{\cancel{6}^{\,3} \times 5 \times \cancel{\underline{|4}}^{\,1}}{\cancel{2}_{\,1} \times 1 \times \cancel{\underline{|4}}_{\,1}} = 15$.

ب) $ق^{8}_{0} = \frac{\underline{|8}}{\underline{|0} \times \underline{|8}} = 1$

جـ) $ق^{10}_{10} = \frac{\underline{|10}}{\underline{|10} \times \underline{|0}} = 1$

د) $ق^{60}_{15} = \frac{\underline{|60}}{\underline{|15} \times \underline{|45}} = \frac{60 \times 59 \times \ldots \times 46 \times \cancel{\underline{|45}}}{15 \times 14 \times \ldots \times 1 \times \cancel{\underline{|45}}} = 5{,}319408919 \times 10^{13}$.

عندما تكون الأعداد كبيرة فإن استخدام الآلة الحاسبة يوفر الوقت والجهد .

مثال (١ - ١٤)

بكم طريقة يمكن اختيار لجنة خماسية من تسعة أشخاص ؟

الحــــل :

هنا لايهمنا ترتيب الأشخاص في اللجنة التي نختارها لذلك فإن هذه اللجان هي توفيقات .

عدد الطرق = $^{٩}\text{ق}_{٥} = \dfrac{\text{ل}٩}{\text{ل}٥ \;\; \text{ل}٤} = \dfrac{٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦ \; \cancel{\text{ل}٥}}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \; \cancel{\text{ل}٥}} = ١٢٦$ طريقة .

مثال (١ - ١٥)

كم عدد الطرق الممكنة لانتخاب لجنة مؤلفة من خمسة أشخاص ثلاثة رجال وامرأتين من بين ثلاثين شخصاً من الرجال وعشر من النساء ؟

الحــــل :

عدد الطرق الممكنة لاختيار ثلاثة رجال = $^{٣٠}\text{ق}_{٣} = \dfrac{\text{ل}٣٠}{\text{ل}٣ \times \text{ل}٢٧} = ٤٠٦٠$ طريقة .

عدد الطرق الممكنة لاختيار امرأتين = $^{١٠}\text{ق}_{٢} = \dfrac{\text{ل}١٠}{\text{ل}٢ \times \text{ل}٨} = ٤٥$ طريقة .

إذن عدد الطرق الممكنة لتشكيل هذه اللجنة = $^{٣٠}\text{ق}_{٣} \times {}^{١٠}\text{ق}_{٢} = ١٨٢٧٠٠$ طريقة .

مثال (١ - ١٦)

بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من خمسة مدراء على الأقل من بين ٧ مدراء ؟

الحــــل :

اختيار خمسة مدراء على الأقل يعني أننا يمكن أن نختار خمسة مدراء أو ستة أو سبعة (دون ترتيب) .

عدد طرق اختيار خمســة مدراء = $^{٧}\text{ق}_{٥} = \dfrac{\text{ل}٧}{\text{ل}٥ \times \text{ل}٢} = ٢١$ طريقة .

عدد طرق اختيـار ستة مـدراء = $^{٧}\text{ق}_{٦} = \dfrac{\text{ل}٧}{\text{ل}٦ \times \text{ل}١} = ٧$ طرق .

عدد طرق اختيــار سبعة مدراء = $^{٧}\text{ق}_{٧} = \dfrac{\text{ل}٧}{\text{ل}٧ \times \text{ل}٠} = ١$ طريقة.

إذن عدد الطرق الممكنة لاختيارخمسة مدراء على الأقل

$= {}^{٧}\text{ق}_{٥} + {}^{٧}\text{ق}_{٦} + {}^{٧}\text{ق}_{٧} = ٢١ + ٧ + ١ = ٢٩$ طريقة .

خواص التوافيق :

١- إذا كان $^{ن}ق_{ر_1} = {}^{ن}ق_{ر_2}$ ؛ فإمّا $ر_1 = ر_2$ ، أو $ر_1 + ر_2 = ن$.

٢- $^{ن}ق_{ر} = {}^{ن}ق_{ن-ر}$

٣- $^{ن}ق_{ر} + {}^{ن}ق_{ر-1} = {}^{ن+1}ق_{ر}$ «وتسمى هذه العلاقة علاقة الكرخي».

مثال (١ - ١٧)

إذا كان : $^{25}ق_{2ر} = {}^{25}ق_{3ر-5}$ ، فأوجد قيمة $ر$.

الحـــل :

إما أن تكون $2ر = 3ر - 5$ $\Leftarrow$ $ر = 5$

أو أن تكون $2ر = 25 - (3ر - 5)$ $\Leftarrow$ $2ر = 25 - 3ر + 5$ $\Leftarrow$ $5ر = 30$

$\therefore$ $ر = 6$

تدريب (١ - ٢)

تحقق من الحل في المثال السابق (١ - ١٧) .

تجزئة مجموعة :

عدد طرق تقسيم $ن$ من العنا صر المتماثلة إلى مجموعتين جزئيتين تتضمن الأولى $ن_1$ عنصراً، وتتضمن الأخرى $ن_2$ عنصراً ؛ حيث إن : $ن_1 + ن_2 = ن$ هو :

$$\text{عدد الطرق} = \binom{ن}{ن_1 ، ن_2} = \frac{ن!}{ن_1!\ ن_2!} \ .$$

وبصورة عامة فإن عدد طرق تقسيم $ن$ من العناصر إلى $م$ مجموعة جزئية بحيث تتضمن المجموعة الأولى $ن_1$ عنصراً متماثلاً ، والمجموعة الثانية $ن_2$ عنصراً متماثلاً ، . . . ، والمجموعة الأخيرة $ن_م$ عنصراً متماثلاً هو :

$$\binom{ن}{ن_1 ، ن_2 ، \ldots ، ن_م} = \frac{ن!}{ن_1!\ ن_2! \ldots ن_م!} \ .$$

مثال (١ - ١٨)

بكم طريقة يمكن ترتيب حروف كلمة سلسبيل ؟

الحـــل :

عدد حروف كلمة سلسبيل = ٦ أحرف .

عدد تكرار حـرف السـين = ٢ (حرفان) ، و عدد تكرار حـرف اللام = ٢ (حرفان) .

عـدد تكرار حـرف الباء = ١ (حرف واحد) ، وعـدد تكرار حـرف الياء = ١ (حرف واحد)

∴ عدد الطرق = $\binom{٦}{٢،٢،١،١} = \frac{\text{ل}٦}{\text{ل}٢\ \text{ل}٢\ \text{ل}١\ \text{ل}١} = \frac{٦ \times ٥ \times \cancel{٤}^{٢} \times ٣ \times \cancel{\text{ل}٢}}{\cancel{٢} \times ١ \times ١ \times ١ \times \cancel{\text{ل}٢}} = ١٨٠$ طريقة .

مثال (١ - ١٩)

بكم طريقة مختلفة يمكن توزيـع ١٢ كتاباً مختلفاً على ثلاثة طـلاب بحيـث يأخذ الأول ٥ كتب والثاني ٤ كتب والثالث ٣ كتب ؟

الحـــل :

بما أنه سيتم توزيع جميع الكتب على الطلاب الثلاثة ؛فإن العملية هي تجزئة مجموعة مؤلفة من ١٢ عنصراً إلى ثلاث مجموعات جزئية منفصلة أعداد عناصرها ٥ ، ٤ ، ٣ على الترتيب وعليه يكون :

عدد الطرق الممكنة $= \binom{١٢}{٥،٤،٣} = \frac{\text{ل}١٢}{\text{ل}٥\ \text{ل}٤\ \text{ل}٣} = \frac{١٢ \times ١١ \times ١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧ \times ٦\ \cancel{\text{ل}٥}}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١ \times ٣ \times ٢ \times ١\ \cancel{\text{ل}٥}} = ٢٧٧٢٠$ طريقة .

مثال (١ - ٢٠)

اختبار مكون من ثمانية أسئلة ، بكم طريقة يستطيع طالب أن يختار ستة منها إذا كان عليه أن يجيب عن سؤالين على الأقل من بين الثلاثة الأولى ؟

الحـــل :

عد الطرق $= ق^{٣}_{٢} \times ق^{٥}_{٤} + ق^{٣}_{٣} \times ق^{٥}_{٣}$

$$= \frac{\text{ل}٣}{\text{ل}٢\ \text{ل}١} \times \frac{\text{ل}٥}{\text{ل}٤\ \text{ل}١} + \frac{\cancel{\text{ل}٣}}{\text{ل}٣\ \text{ل}٠} \times \frac{\text{ل}٥}{\cancel{\text{ل}٣}\ \text{ل}٢} = \frac{٣ \times ٢ \times ٥\ \cancel{\text{ل}٤}}{٢\ \cancel{\text{ل}٤}} + \frac{٥ \times ٤\ \cancel{\text{ل}٣}}{٢ \times ١\ \cancel{\text{ل}٣}}$$

$= ١٥ + ١٠ = ٢٥$ طريقة .

مثال (١ - ٢١)

أثبت صحة العلاقة التالية :

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} \div \binom{\text{ن}}{\text{ر}-١} = \frac{\text{ن} - \text{ر} + ١}{\text{ر}}$$

الحـــل :

$$\because \binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\ (\text{ن}-\text{ر})!} \quad ، \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١)$$

$$\binom{\text{ن}}{\text{ر}-١} = \frac{\text{ن}!}{(\text{ر}-١)!\ (\text{ن}+١-\text{ر})!} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢)$$

$$\text{الطرف الأيمن} = \frac{\binom{\text{ن}}{\text{ر}}}{\binom{\text{ن}}{\text{ر}-١}} = \binom{\text{ن}}{\text{ر}} \div \binom{\text{ن}}{\text{ر}-١} = \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\ (\text{ن}-\text{ر})!} \div \frac{\text{ن}!}{(\text{ر}-١)!\ (\text{ن}-\text{ر}+١)!}$$

$$= \frac{\text{ن}!}{\text{ر}!\ (\text{ن}-\text{ر})!} \times \frac{(\text{ر}-١)!\ (\text{ن}+١-\text{ر})!}{\text{ن}!}$$

$$= \frac{(\text{ر}-١)!\ (\text{ن}+١-\text{ر})\ (\text{ن}-\text{ر})!}{\text{ر}\ (\text{ر}-١)!\ (\text{ن}-\text{ر})!} = \frac{\text{ن}+١-\text{ر}}{\text{ر}} = \text{الطرف الأيسر} .$$

تمارين ومسائل (١ - ٣)

[١] احسب الآتي :

$\text{ق}^{٢}_{١}$ ، $\text{ق}^{٨}_{٤}$ ، $\text{ق}^{٧٠}_{٦٨} - \text{ق}^{٧٠}_{٢}$ ، $\binom{١١}{٢}$ ، $\text{ق}^{٦}_{٣} + \text{ق}^{٣}_{١}$ ، $\text{ق}^{١٠٠}_{٩٨}$.

[٢] أوجد قيمة ر في كل مما يأتي :

أ) $\text{ق}^{١٥}_{\text{ر}} = \text{ق}^{١٥}_{٦}$.　　ب) $\text{ق}^{٢٠}_{٢\text{ر}} = \text{ق}^{٢٠}_{\text{ر}+٢}$.

جـ) $\text{ق}^{٢٨}_{\text{ر}+٤} = \text{ق}^{٢٨}_{\text{ر}-٢}$.　　د) $\text{ل}^{\text{ن}}_{\text{ر}} = ١٢٠\ \text{ق}^{\text{ن}}_{\text{ن}-\text{ر}}$.

[٣] أوجد قيمة ن في كل مما يأتي :

أ) $\text{ق}^{\text{ن}}_{٢} = ٤٣٥$.　　ب) $٥\ \text{ق}^{\text{ن}}_{٦} = ١٢\ \text{ق}^{\text{ن}}_{٤}$.　　جـ) $٢\ \text{ق}^{\text{ن}}_{٤} = ٣٥\ \text{ق}^{\frac{\text{ن}}{٢}}_{٣}$

[٤] بكم طريقة يمكن ترتيب حروف ما يلي :

أ) لا إله إلا الله . ب) عزيز . جـ) سمسم .

[٥] بكم طريقة يمكن اختيار خمسة أسئلة للإجابة عنها في امتحان اشتمل على ثمانية أسئلة ؟

[٦] لدى مؤسسة ما خمس وظائف شاغرة للعمل، فبكم طريقة يمكن شغل هذه الوظائف من قبل ١٠ أشخاص؟

[٧] من بين عشرة طلاب يراد اختيار فريق لكرة السلة المكون من خمسة لاعبين ، بكم طريقة يتم ذلك؟

[٨] بكم طريقة يمكن اختيار (٤) كتب على الأقل من بين (٨) كتب ؟

[٩] أوجد عدد الطرق الممكنة لاختيار (٤) كتب على الأكثر من بين (٨) كتب .

[١٠] بكم طريقة يمكن انتخاب لجنتين تتكون كل منها من ثلاثة أشخاص من بين ١٢ شخصاً، بحيث يستبعد أحد الأشخاص من اللجنتين ؟

[١١] مجموعة مكونة من عشرة طلاب ، وخمس طالبات ، بكم طريقة يمكن تشكيل لجنة مكونة من سبعة أشخاص في الحالات التالية ؟

أ) بدون شرط .

ب) من طالب رئيساً وعضوية ثلاث طالبات وثلاثة طلاب .

جـ) من ثلاثة طلاب على الأقل .

[١٢] من بين عشرة طلاب، وستة مدرسين يراد تشكيل جماعة للرياضيات في مدرسة بحيث تتألف من خمسة طلاب ، وأربعة مدرسين ، فبكم طريقة يتم ذلك ؟

[١٣] بكم طريقة يتم تقسيم ٢٤ طالباً إلى ثلاث مجموعات مكونة من (٩ ، ٨ ، ٧) طلاب .

[١٤] من بين ثمانية عشر طالبة. بكم طريقة يمكن اختيار ثلاث لجان مكونة من ثلاث طالبات، أربع طالبات، خمس طالبات، بحيث لا تشترك أية طالبة في أكثر من لجنة ؟

[١٥] أثبت صحة الآتي :

أ) $ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}+1} + 2\;{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1} = {}^{\text{ن}+2}\text{ق}_{\text{ر}+1} $.

ب) $ {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}} + 2\;{}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-1} + {}^{\text{ن}}\text{ق}_{\text{ر}-2} = {}^{\text{ن}+2}\text{ق}_{\text{ر}} $.

جـ) $ \dfrac{{}^{\text{ن}}\text{ق}_{1} \bullet {}^{2\text{ن}}\text{ق}_{2}}{{}^{3\text{ن}}\text{ق}_{3}} = \dfrac{{}^{2\text{ن}}\text{ل}_{2}}{{}^{3\text{ن}-1}\text{ل}_{2}} $.

٢ - ١ مراجعة

تعرّفت في دراستك السابقة على مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال) وسُمّيت بمقاييس النزعة المركزية؛ لأنها تحدد موضع، أو موقع تمركز القيم حول قيمة معينة .

أولاً – المتوسط الحسابي ($\bar{س}$) :

١) في حالة البيانات غير المبوبة (مفردة) :

المتوسط الحسابي لمجموعة ذات (د) من القيم $س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، . . . . ، $س_د$ يساوي مجموع هذه القيم مقسوماً على عددها ، أي أن :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{د} س_ر}{د} \qquad (٢-١)$$

حيث $\bar{س}$ المتوسط الحسابي ، د عدد القيم ، $س_ر$ القيم المختلفة ، ر دليل القيم .

٢) في حالة البيانات المبوبة يكون المتوسط الحسابي :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{م} ك_ر \times س_ر}{\sum_{ر=١}^{م} ك_ر} \qquad (٢-٢)$$

حيث $\sum_{ر=١}^{م} ك_ر$ هو مجموع التكرارات ، $ك_ر$ تكرار الفئات ، $س_ر$ مركز الفئة .

ثانياً– الوسيط (و) :

الوسيط لمجموعة من القيم مرتبة تصاعدياً أو تنازلياً هو العدد الأوسط منها وهناك حالتان لحساب الوسيط :

١) في حالة البيانات غير مبوبة (مفردة) فننظر لعدد القيم :

أ) إذا كانت عدد القيم فردية فيكون الوسيط هو العدد الذي رتبته هي : $\frac{د + ١}{٢}$.

ب) إذا كانت عدد القيم زوجية فيكون الوسيط هو المتوسط الحسابي للعددين الذين رتبتاهما

هي : $\frac{د}{٢}$ ، $\frac{د}{٢} + ١$.

٢) في حالة البيانات المبوبة يتم حساب الوسيط بأحدى الطريقتين التاليتين:

أ) في حالة التكرار المجتمع الصاعد :

$$\text{الوسيط (و)} = \text{أ} + \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_١}{\text{ك}_٢} \times \text{ل} \qquad (٢-٣)$$

حيث أ الحد الأدنى للفئة الوسيطية ، ن التكرار الكلي ، $\text{ك}_١$ التكرار المتجمع التصاعدي للفئة السابقة للفئة الوسيطية ، $\text{ك}_٢$ تكرار الفئة الوسيطية ، ل طول الفئة الوسيطية .

ب) في حالة التكرار المتجمع النازل :

$$\text{الوسيط (و)} = \text{ب} - \frac{\frac{\text{ن}}{٢} - \text{ك}_٣}{\text{ك}_٢} \times \text{ل} \qquad (٢-٤)$$

حيث ب الحد الأعلى للفئة الوسيطية ، ن التكرار الكلي ، $\text{ك}_٣$ التكرار المتجمع التنازلي للفئة اللاحقة للفئة الوسيطية ، $\text{ك}_٢$ تكرار الفئة الوسيطية ، ل طول الفئة الوسيطية .

ثالثاً– المنوال :

المنوال هو القيمة الأكثر تكراراً في البيانات ، وفي حالة البيانات المبوبة يكون المنوال هو مركز الفئة المنوالية (المناظرة لأكثر تكراراً) . وقد يكون في التوزيع أكثر من منوال .

مثال (٢ – ١)

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات التالية: ١٣ ، ١٢ ، ١٣ ، ١١ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٠ ، ١٠.

الحـــل :

المتوسط الحسابي : $\bar{\text{س}} = \frac{\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_\text{ر}}{\text{ن}} = \frac{١٣+١٢ + ١٣+١١+١٤+١٣+١٠+١٠}{٨} = \frac{٩٦}{٨} = ١٢$.

ولإيجاد الوسيط نرتب البيانات تصاعدياً كما يلي :

١٠ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ ، ١٣ ، ١٣ ، ١٤ وحيث إن عدد القيم زوجي (٨ قيم) فتكون رتبتا العددين الأوسطين هما : الرابع والخامس ، وبالتالي فإن العددين هما : ١٢ ، ١٣.

∴ الوسيط $= \frac{١٢ + ١٣}{٢} = \frac{٢٥}{٢} = ١٢,٥$

المنوال = ١٣ وهي القيمة الأكثر تكراراً .

مثال (٢ – ٢)

أوجد المتوسط الحسابي، والوسيط، والمنوال للبيانات المبوبة في الجدول (٢–١) والتي تمثل محصول البن في إحدى السنوات لدى ٣٠ مزارعاً (الكمية بالطن) :

المحصول	٢–٦	٧ – ١١	١٢–١٦	١٧–٢١
التكرار	٤	١٢	٨	٦

جدول (٢–١)

الحـــــل : لايجاد كلٍ من المتوسط الحسابي والوسيط في مثل هذه البيانات نكوّن الجدول كما في (٢–٢) :

الفئات	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	$س_ر \times ك_ر$	التكرار المتجمع الصاعد
٢ – ٦	٤	٤	١٦	$\boxed{٤} \leftarrow ك_١$ $\rightarrow \frac{ن}{٢} = ١٥$
أ ← $\boxed{٧}$ –١١	٩	$\boxed{١٢} \leftarrow ك_٢$	١٠٨	١٦
١٢ –١٦	١٤	٨	١١٢	٢٤
١٧–٢١	١٩	٦	١١٤	٣٠
المجموع		٣٠	٣٥٠	

جدول (٢ – ٢)

المتوسط الحسابي : $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر \times ك_ر)}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر} = \frac{٣٥٠}{٣٠} \approx ١١,٧$

الوسيط : لاحظ أن $\frac{ن}{٢} = ١٥$ ، فتكون الفئة الوسيطية هي ٧ – ١١ ، وبالتالي فإن :

$ك_١ = ٤$ التكرار المتجمع الصاعد السابق للفئة الوسيطية، $ك_٢ = ١٢$ التكرار للفئة الوسيطية .

الفئة التي تناظر $ك_٢$ هي ٧ – ١١ فيكون الحد الأدنى للفئة الوسيطية أ = ٧ .

طول الفئة الوسيطية(ل)= الحد الأعلى الحقيقي للفئة – الحد الأدنى الحقيقي للفئة ١١,٥ –٦,٥ = ٥ ∴ ل = ٥

$$\therefore \text{الوسيط } (و) = أ + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_١}{ك_٢} \times ل = ٧ + \frac{١٥ - ٤}{١٢} \times ٥ \approx ١١,٦ \ .$$

$$\text{المنوال} = \frac{٧ + ١١}{٢} = ٩ \ .$$

تدريب (٢ – ١)

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال لكل من مما يأتي :

أ) ١٢ ، ١١ ، ١١ ، ١٢ ، ١٠ ، ١١ ، ١٢ ، ١٣ .

ب) ٢٦ ، ٢٣ ، ٣٢ ، ٢٦ ، ٢٧ ، ٢٦ ، ٢٨ .

تدريب (٢ – ٢)

أوجد المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال للبيانات المبوبة في الجدول (٢–٣) :

الوزن بالكيلوجرام	٤٥–٤٩	٥٠–٥٤	٥٥–٥٩	٦٠–٦٤	٦٥–٦٩	٧٠–٧٤
عدد الطلاب	٢	٧	١٣	٢٣	٣	٢

جدول (٢–٣)

مقاييس التشتت :

من أهم مقاييس التشتت المدى والانحراف المتوسط والتباين والانحراف المعياري ، وفيما يلي نقدم تعاريف وأمثلة لكل من هذه المقاييس .

المـــدى :

المدى للبيانات غير المبوبة هو الفرق بين أعلى قيمة، وأدنى قيمة فيها، ويعطى بالعلاقة :

المدى = أعلى قيمة – أدنى قيمة

وفي حالة البيانات المبوبة يكون المدى هو الفرق بين الحد الأعلى لآخر فئة والحد الأدنى لأول فئة ، أي أن :

المدى = الحد الأعلى الحقيقي لآخر فئة – الحد الأدنى الحقيقي لأول فئة

مثال (٢ – ٣)

إذا كان لدينا البيانات التالية تمثل قدرة ستة لاعبين على الوثب العالي وهي : ٣,٢٥م ، ٣م ، ٣,٥٠م ، ٣,١٠م ، ٣,٤م ، ٢,٩م ، فاحسب مدى هذه البيانات .

الحـــــل :

المدى = أعلى قيمة – أدنى قيمة .

= ٣,٥٠ – ٢,٩٠ = ٠,٦٠ م .

مثال (٢ – ٤)

الجدول (٢–٤) يمثل درجات ٥٠ طالباً في اختبار شهري لمادة الفيزياء الدرجة العظمى ٢٠ درجة :

فئة الدرجات	٥–٨	٩–١٢	١٣–١٦	١٧–٢٠
التكرار	٤	١٦	٢١	٩

جدول (٢–٤)

أوجد المدى لدرجات الطلبة الموضحة في الجدول (٢–٤) .

الحــــل :

المدى = الحد الأعلى لأخر فئة – الحد الأدنى لأول فئة .

= ٢٠,٥ – ٤,٥ = ١٦ .

الانحراف المتوسط :

هو مقياس من مقاييس التشتت يقيس بدقة بُعد العلامة الخام عن متوسطها الحسابي ويرمز له بالرمز (ح) ،

أي أن : $ح = |س - \bar{س}|$.

ولحساب الانحراف المتوسط نتبع ما يلي :

١ – إيجاد المتوسط الحسابي لقيم المشاهدات .

٢ – إيجاد الانحرافات المطلقة لكل مشاهدة (أو مركز الفئة) عن متوسطها الحسابي من العلاقة :

$ح_ر = |س_ر - \bar{س}|$.

٣– إيجاد المتوسط الحسابي للانحرافات المطلقة بالعلاقة :

$$\bar{ح} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} |س_ر - \bar{س}|}{ن} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} |ح_ر|}{ن} \qquad (٢-٥)$$

وفي حالة البيانات المبوبة نجد الانحراف المتوسط من العلاقة :

$$\bar{ح} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر |ح_ر|}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر} \qquad (٢-٦)$$

حيث $ك_ر$ هو تكرار الفئات .

وكلما صغرت قيمة هذا المتوسط كلما اقتربت المشاهدات من متوسطها الحسابي، وكلما كبرت قيمة هذا المتوسط كلما ابتعدت عنه، أي أن متوسط الانحرافات يعتبر دليلاً، أو مؤشراً على قرب، أو بعد المشاهدات عن متوسطها الحسابي .

مثال (٢ – ٥)

أوجد الانحراف المتوسط للمشاهدات التالية : ١٥ ، ١٧ ، ٢٠ ، ١٤ ، ١٩ .

الحــــل :

$$\because \bar{س} = \frac{١٥ + ١٧ + ٢٠ + ١٤ + ١٩}{٥} = \frac{٨٥}{٥} = ١٧$$

$|ح_١| = |١٥ - ١٧| = ٢$

$|ح_٢| = |١٧ - ١٧| = ٠$

$|ح_٣| = |٢٠ - ١٧| = ٣$

$|ح_٤| = |١٤ - ١٧| = ٣$

$|ح_٥| = |١٩ - ١٧| = ٢$

$$\therefore \text{الانحراف المتوسط } (\bar{ح}) = \frac{\sum_{ر=١}^{ د} |ح_ر|}{د} = \frac{٢ + ٠ + ٣ + ٣ + ٢}{٥} = \frac{١٠}{٥} = ٢ \ .$$

مثال (٢ - ٦)

البيانات في الجدول (٢–٥) تمثل أوزان مائة طالب بالكيلو جرام

فئات الأوزان	٤٠–٤٤	٤٥–٤٩	٥٠–٥٤	٥٥–٥٩	٦٠–٦٤	٦٥–٦٩
التكرار	٥	١٠	٣٠	٣٥	١٢	٨

جدول (٢–٥)

أوجد الانحراف المتوسط لأوزان هؤلاء الطلبة .

الحــــل :

نكون الجدول (٢–٦) التالي :

الفئات	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$|ح_ر| = |س_ر - \bar{س}|$	$|ح_ر| \times ك_ر$
٤٠–٤٤	٤٢	٥	٢١٠	١٣,١٥	٦٥,٧٥
٤٥–٤٩	٤٧	١٠	٤٧٠	٨,١٥	٨١,٥٠
٥٠–٥٤	٥٢	٣٠	١٥٦٠	٣,١٥	٩٤,٥٠
٥٥–٥٩	٥٧	٣٥	١٩٩٥	١,٨٥	٦٤,٧٥
٦٠–٦٤	٦٢	١٢	٧٤٤	٦,٨٥	٨٢,٢
٦٥–٦٩	٦٧	٨	٥٣٦	١١,٨٥	٩٤,٨٠
المجموع		١٠٠	٥٥١٥		٤٨٣,٥

جدول (٢ – ٦)

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ د} س_ر \times ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ د} ك_ر} = \frac{٥٥١٥}{١٠٠} = ٥٥,١٥$$

$$\text{الانحراف المتوسط } \bar{ح} = \frac{\sum_{ر=١}^{ د} ك_ر \times |ح_ر|}{\sum_{ر=١}^{ د} ك_ر} = \frac{٤٨٣,٥}{١٠٠} = ٤,٨٣٥$$

التباين :

يعرف التباين بأنه مجموع مربعات انحراف القيم عن متوسطها الحسابي مقسوماً على عددها ($ن$) مطروحاً منه واحد ويرمز له بالرمز ($ع^2$) .

ويعبر عن هذا التعريف رمزياً بالصورة :

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2}{ن - 1} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ح_ر^2}{ن - 1} \qquad (2-7)$$

حيث $ع^2$ التباين ، $س_ر$ القيم المختلفة ، $ر$ دليل القيم ، $\bar{س}$ المتوسط الحسابي للقيم ، $ن$ حجم العينة (عدد القيم) ، وتستخدم هذه العلاقة عندما يكون المطلوب إيجاد التباين لقيم مفردة من البيانات .

أما إذا كان المطلوب إيجاد التباين عن طريق المتوسط الحسابي لبيانات مبوبة في فئات نستخدم العلاقة :

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} (س_ر - \bar{س})^2 \times ك_ر}{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر - 1} \qquad (2-8)$$

حيث $ك_ر$ هو التكرار ، $س_ر$ هي العلامات الخام .

وفي حالة إيجاد التباين لبيانات مبوبة في فئات ومن خلال العلامات الخام نستخدم العلاقة :

$$ع^2 = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر س_ر^2}{ن - 1} - \left(\frac{\sum_{ر=1}^{ن} ك_ر \times س_ر}{ن - 1} \right)^2 . \qquad (2-9)$$

الانحراف المعياري :

يعرف الانحراف المعياري بأنه الجذر التربيعي الموجب للتباين، ويرمز له بالرمز (ع) ويعبر عنه رمزياً بالصورة:

$$ع = \sqrt{ع^2} .$$

وبذلك يمكن أخذ الجذر التربيعي للقوانين (٢ – ٧) ، (٢ – ٨) ، (٢ – ٩) حسب الحالات المعنية .

مثال (٢ – ٧)

أوجد التباين والانحراف المعياري للقيم ٥ ، ٧ ، ١٠ ، ١٢ ، ٦ .

الحـــل :

لحساب التباين نجد أولاً المتوسط الحسابي للقيم :

$$\bar{س} = \frac{٥ + ٧ + ١٠ + ١٢ + ٦}{٥} = \frac{٤٠}{٥} = ٨ .$$

ثم نكون الجدول (٢–٧) كما يلي :

$س_ر$	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^٢$
٥	–٣	٩
٧	–١	١
١٠	٢	٤
١٢	٤	١٦
٦	–٢	٤
المجموع		٣٤

جدول (٢–٧)

التباين : $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢}{ن - ١} = \frac{٣٤}{٤} = ٨,٥ .$

الانحراف المعياري : $ع = \sqrt{٨,٥} \approx ٢,٩ .$

مثال (٢ – ٨)

الجدول (٢–٨) يمثل درجات ٤٥ طالباً في اختبار مادة الفلسفة، حيث الدرجة العظمى (١٠) درجات :

الدرجة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠
التكرار	٤	٧	٩	١٢	٩	٣	١

جدول (٢–٨)

أوجد التباين، والانحراف المعياري لدرجات الطلبة .

الحــــل :

لحساب التباين والانحراف المعياري نكون الجدول (٢–٩) كما يلي :

$س_ر$	$ك_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$(س_ر - \bar{س})$	$(س_ر - \bar{س})^٢$	$(س_ر - \bar{س})^٢ \times ك_ر$
٤	٤	١٦	–٢,٦	٦,٧٦	٢٧,٠٤
٥	٧	٣٥	–١,٦	٢,٥٦	١٧,٩٢
٦	٩	٥٤	–٠,٦	٠,٣٦	٣,٢٤
٧	١٢	٨٤	٠,٤	٠,١٦	١,٩٢
٨	٩	٧٢	١,٤	١,٩٦	١٧,٦٤
٩	٣	٢٧	٢,٤	٥,٧٦	١٧,٢٨
١٠	١	١٠	٣,٤	١١,٥٦	١١,٥٦
المجموع	٤٥	٢٩٨			٩٦,٦٠

جدول (٢ – ٩)

المتوسط الحسابي : $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر \times س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر} = \frac{٢٩٨}{٤٥} \approx ٦,٦$

التباين : $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢ \times ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر - ١} = \frac{٩٦,٦}{٤٤} \approx ٢,٢$

الانحراف المعياري : $ع = \sqrt{٢,٢} \approx ١,٤٨$

مثال (٢ – ٩)

الجدول (٢–١٠) يوضح الزمن بالدقائق ٣٥ متسابقاً لقطع مسافة ٦ كيلومتر :

الزمن بالدقيقة	١٥–١٧	١٨–٢٠	٢١–٢٣	٢٤–٢٦
التكرار	٦	١٤	١٢	٣

جدول (٢ – ١٠)

أوجد التباين والانحراف المعياري لنتائج السباق .

الحـــل :

نكون الجدول (٢–١١) كما يلي :

الفئة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	$س_ر \times ك_ر$	$(س_ر - \bar{س})$	$(س_ر - \bar{س})^٢$	$(س - \bar{س})^٢ \times ك_ر$
١٥–١٧	١٦	٦	٩٦	–٤,٠٣	١٦,٢٤٠٩	٩٧,٤٤٥٤
١٨–٢٠	١٩	١٤	٢٦٦	–١,٠٣	١,٠٦٠٩	١٤,٨٥٢٦
٢١–٢٣	٢٢	١٢	٢٦٤	١,٩٧	٣,٨٨٠٩	٤٦,٥٦٧٠٩
٢٤–٢٦	٢٥	٣	٧٥	٤,٩٧	٢٤,٧٠٠٩	٧٤,١٠٢٧
المجموع		٣٥	٧٠١			٢٣٢,٩٧١٦

المتوسط الحسابي : $\bar{س} = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر \times س_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر} = \frac{٧٠١}{٣٥} \approx ٢٠,٠٣$

التباين : $ع^٢ = \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})^٢ \times ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر - ١} = \frac{٢٣٢,٩٧١٦}{٣٤} \approx ٦,٨٥$

الانحراف المعياري : $\sqrt{ع^٢} = \sqrt{٦,٨٥} \approx ٢,٦$.

تمارين ومسائل (٢ – ١)

[١] إذا كان لديك البيانات التالية :

أ) ٧ ، ٨ ، ١٠ ، ١٢ ، ١٣ .   ب) ١٢ ، ٠ ، ٦ ، ٨ .   جـ) ٤ ، ٥ ، ٣ ، ٥ ، ٣ .

اعتماداً على البيانات السابقة ؛ أوجد كل مما يلي :

أ) المتوسط الحسابي .   ب) المدى .   جـ) الوسيط .

د) الانحراف المتوسط .   هـ) التباين .   و) الانحراف المعياري .

[٢] الجدول (٢–١٢) يوضح عدد زيارات بعض السيدات الحوامل لمركز الأمومة، والطفولة في إحدى مدن الجمهورية خلال ستة أسابيع :

الأسبوع	الأول	الثاني	الثالث	الرابع	الخامس	السادس
عدد الزيارات	٨٨	٨٥	٩٢	٧٥	٧٨	٨٢

أ) أوجد المدى للزيارات ، كذلك الانحراف المتوسط لها .

ب) احسب التباين، والانحراف المعياري للزيارات .

[٣] بيانات الجدول (٢–١٣) تمثل درجات ١٠٠ طالب في مادة الرياضيات .

(علماً بأن الدرجة من ٥٠) .

الفئة	١–١٠	١١–٢٠	٢١–٣٠	٣١–٤٠	٤١ – ٥٠
التكرار	٢	٥	٢٩	٤٥	١٩

جدول (٢–١٣)

أوجد : أ) المدى . ب) الانحراف المتوسط . جـ) التباين . د) الانحراف المعياري .

[٤] الجدول (٢–١٤) يمثل الأجر اليومي بالريال لخمسين عاملاً :

الفئة	٥٠٠ – ٦٩٩	٧٠٠ – ٨٩٩	٩٠٠ – ١٠٩٩	١١٠٠ – ١٢٩٩
التكرار	٥	٢٥	١٢	٨

أوجد : أ) المدى . ب) الانحراف المتوسط .

جـ) التباين . د) الانحراف المعياري .

٢ – ٢ الارتبـاط وأشـكال الانـتـشـار

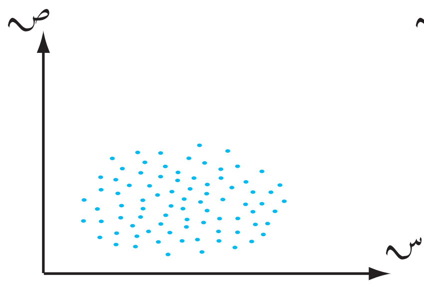
اقتصرت دراستك السابقة لبعض المقاييس الاحصائية لبيانات تتعلق بمتغير ، وهي مقاييس النزعة المركزية والتشتت . وفي هذا البند سوف تتعرف على مفهوم إحصائي يبين العلاقة بين متغيرين ، ويسمى الارتباط . مثل العلاقة بين طول الفرد ووزنه والعلاقة بين كمية الأمطار وارتفاع منسوب المياه في الحواجز المائية .

أشكال الانتشار :

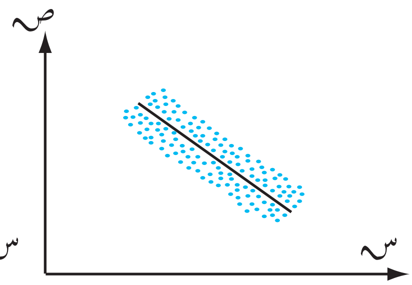
من السهل تكوين فكرة أولية عن اتجاه وقوة العلاقة بين متغيرين دون حساب معامل الارتباط ، وذلك من خلال رسم ما يسمى بشكل الانتشار فمثلاً إذا رمزنا لأحد المتغيرين بالرمز (س) والمتغير الآخر بالرمز (ص) فإن بيانات هذين المتغيرين يمكن كتابتها على شكل أزواج مرتبة كما يلي :

(س$_{١}$، ص$_{١}$) ، (س$_{٢}$ ، ص$_{٢}$) ، (س$_{٣}$ ، ص$_{٣}$) ، . . . . ، (س $_{د}$ ، ص $_{د}$) ؛ كما يمكن تمثيلها بيانياً في المستوى

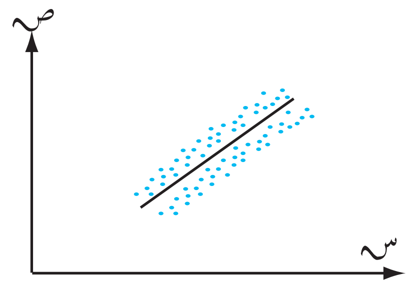
الإحداثي كنقاط ، ويسمى التمثيل البياني الناتج **بشكل الانتشار** . ويظهر في الأشكال التالية ثلاثة أنواع من الانتشار :



شكل (٢ – ٣)



شكل (٢ – ٢)



شكل (٢ – ١)

الشكل (٢–١) يوحي بوجود ارتباط موجب بين المتغير ين س ، ص ؛ حيث إن المتغير (ص) يزيد بزيادة المتغير (س) .

يوحي الشكل (٢–٢) بوجود ارتباط سالب بين المتغيرين س ، ص ؛ حيث ينقص المتغير (ص) بزيادة المتغير (س) .

الشكل (٢–٣) يوحي بعدم وجود ارتباط بين المتغيرين س ، ص .

مثال (٢ – ١٠)

تم اختيار عشرة طلاب من طلبة الصف الثالث الثانوي عشوائياً، وسُئل كل طالب عن طوله بالسنتيمترات، ووزنه بالكيلو جرامات فكانت إجاباتهم كما هي موضحة في الجدول (٢–١٥) :

الطول بـ (سم)	١٥٠	١٧٠	١٦٨	١٥٤	١٦٣	١٥٨	١٦٥	١٦٠	١٦٦	١٧٢
الوزن بـ (كجم)	٥٢	٧٢	٧٠	٥٣	٦٣	٥٥	٦٥	٦٣	٦٧	٧٣

جدول (٢–١٥)

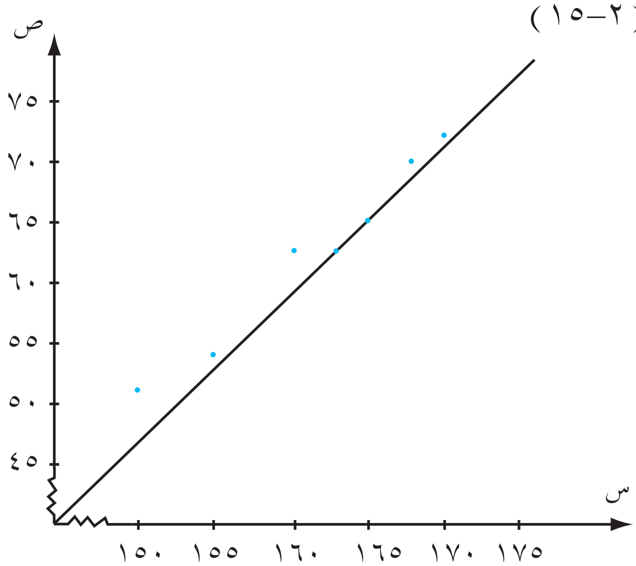
ارسم شكل الانتشار، وبين نوع الارتباط بين الطول والوزن .

الحـــل :

نرمز للطول بالرمز (س) ، ونرمز للوزن بالرمز (ص) ، ونمثل ذلك بالشكل (٢–٤) ؛

نلاحظ أن :

نوع الارتباط طردي (موجب)؛ لأن قيم (ص) تزيد بزيادة قيم (س) . كما أن الارتباط قوي لأن نقاط الانتشار قريبة من المستقيم .



شكل (٢ – ٤)

الارتباط الخطي :

يقصد بالارتباط الخطي بين متغيرين أو ظاهرتين ، وجود علاقة بينهما بحيث إذا تغيرت إحداهما في اتجاه معين فإن الثانية تميل إلى التغير في الاتجاه نفسه أو الاتجاه المضاد وقد لا توجد أية علاقة بين متغيرين مثل الذكاء ولون العيون ، أو الذكاء والنوع . وانعدام العلاقة بين المتغيرين يعني أن معرفتنا في اتجاه أحد المتغيرين وقيمته لا تساعدنا بأي حال من الأحوال على التنبؤ في اتجاه أو قيمة المتغير الآخر . وعادة ما تقاس درجة الارتباط بين متغيرين بمقياس إحصائي يسمى معامل الارتباط ويرمز له بالرمز (ر) (ر ∋ [−١ ، ١]) .

فإذا كانت قيمة ر = ١ فهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرين علاقة طردية تامة (ارتباط خطي موجب قوي) .

وإذا كانت قيمة ر = −١ فهذا يعني أن العلاقة بين المتغيرين علاقة عكسية تامة (ارتباط خطي سالب قوي) .

وإذا كانت قيمة ر = ٠ فهذا يعني عدم وجود ارتباط بين المتغيرين .

نستنتج مما سبق أن معاملات الارتباط تفيد في :

١− تحديد مدى قوة الارتباط بين متغيرين (قوية ، ضعيفة ، منعدمة) .

٢− تحديد اتجاه العلاقة بين المتغيرين (طردية ، عكسية) .

٣− تعطى مؤشرات لإمكانية تقدير المتغير بدلالة الآخر .

٤− تُعد الأساس في دراسة تحليل علاقات السببية .

وهناك أنواع عديدة لمعاملات الارتباط وسوف تتعرف هنا على نوعين هما : معامل ارتباط بيرسون ، ومعامل ارتباط سبيرمان .

معامل ارتباط بيرسون :

يُعدُّ معامل ارتباط بيرسون من أكثر معاملات الارتباط شيوعاً ، واستخداماً ؛ ولحساب معامل ارتباط بيرسون بين متغيرين مثل س ، ص نتبع الخطوات التالية :

١− إيجاد $\bar{س}$ (المتوسط الحسابي لقيم س) ، $\bar{ص}$ (المتوسط الحسابي لقيم ص)

٢− إيجاد $\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})$.

٣− إيجاد $ع_س$ (الانحراف المعياري لقيم س) ، $ع_ص$ (الانحراف المعياري لقيم ص) .

٤− نحسب معامل الارتباط (ر) من العلاقة :

$$ر = \frac{١}{ن - ١} \times \frac{\sum_{ر=١}^{ن} (س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{ع_س \times ع_ص}$$

وتسمى هذه العلاقة بقانون بيرسون للارتباط كما يمكن كتابتها بالصورة :

$$\text{ر} = \frac{\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})(\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})}{\sqrt{\left[\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} (\text{س}_{\text{ر}} - \bar{\text{س}})^2\right]\left[\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} (\text{ص}_{\text{ر}} - \bar{\text{ص}})^2\right]}}$$

كما يمكن حساب معامل ارتباط بيرسون من القيم الأصلية للمتغيرين س ، ص بالعلاقة :

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} \text{س}_{\text{ر}} \text{ص}_{\text{ر}} - \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} \text{س}_{\text{ر}} \times \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} \text{ص}_{\text{ر}}}{\sqrt{\left[\text{ن} \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} \text{س}_{\text{ر}}^2 - \left(\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} \text{س}_{\text{ر}}\right)^2\right]\left[\text{ن} \overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} \text{ص}_{\text{ر}}^2 - \left(\overset{\text{ن}}{\underset{\text{ر}=1}{\text{مجـ}}} \text{ص}_{\text{ر}}\right)^2\right]}}$$

مثال (٢ - ١١)

فسر درجة الارتباط ونوعه بين المتغيرين س ، ص في كل من الحالات الآتية :

أ) ر = ٠,٨٨ .　　ب) ر = −٠,٨٣ .　　جـ) ر = ٠,٢٥ .

د) ر = صفر .　　هـ) ر = −٠,٥٦ .　　و) ر = ٠,٦٢ .

الحـــل :

بملاحظة قيمة معامل الارتباط في كل حالة نجد أن :

أ) ر = ٠,٨٨ الارتباط طردي (موجب)، وهو ارتباط قوي .

ب) ر = −٠,٨٣ الارتباط عكسي (سالب)، وهو ارتباط قوي .

جـ) ر = ٠,٢٥ الارتباط طردي (موجب)، وهو ارتباط ضعيف .

د) ر = صفر لا يوجد ارتباط بين المتغيرين .

هـ) ر = −٠,٥٦ ارتباط عكسي (سالب)، وهو ارتباط متوسط .

و) ر = ٠,٦٢ ارتباط طردي (موجب)، وهو ارتباط متوسط .

مثال (٢ - ١٢)

أوجد معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص من بيانات الجدول (٢–١٦) :

س	٧٠	٨٥	٦١	٥٥	٩٠	٩٠	٩٥
ص	٧٥	٨٢	٦٣	٥٨	٨٨	٩٢	٩٤

جدول (٢–١٦)

الحـــل :

$$\bar{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} س_ر}{ن} = \frac{546}{7} = 78 .$$

$$\bar{ص} = \frac{\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر}{ن} = \frac{552}{7} \approx 79 .$$

ولحساب مجـ $(س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})$ نكوّن الجدول (٢–١٧) التالي :

س	ص	$س_ر - \bar{س}$	$(س_ر - \bar{س})^2$	$ص_ر - \bar{ص}$	$(ص_ر - \bar{ص})^2$	$(س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})$
٧٠	٧٥	٨–	٦٤	٤–	١٦	٣٢
٨٥	٨٢	٧	٤٩	٣	٩	٢١
٦١	٦٣	١٧–	٢٨٩	١٦–	٢٥٦	٢٧٢
٥٥	٥٨	٢٣–	٥٢٩	٢١–	٤٤١	٤٨٣
٩٠	٨٨	١٢	١٤٤	٩	٨١	١٠٨
٩٠	٩٢	١٢	١٤٤	١٣	١٦٩	١٥٦
٩٥	٩٤	١٧	٢٨٩	١٥	٢٢٥	٢٥٥
المجموع			١٥٠٨		١١٩٧	١٣٢٧

جدول (٢ – ١٧)

$$ع_س = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})^2}{ن - 1}} = \sqrt{\frac{1508}{6}} \approx 16 ،$$

$$ع_ص = \sqrt{\frac{\sum_{ر=1}^{ن}(ص_ر - \bar{ص})^2}{ن - 1}} = \sqrt{\frac{1197}{6}} \approx 14$$

$$ر = \frac{1}{ن - 1} \times \frac{\sum_{ر=1}^{ن}(س_ر - \bar{س})(ص_ر - \bar{ص})}{ع_س \times ع_ص} = \frac{1327}{6 \times 16 \times 14} \approx 0{,}99 .$$

مثال (٢ – ١٣)

أوجد معامل ارتباط بيرسون من القيم الأصلية للمتغيرين س ، ص والموضحة بالجدول (٢–١٨) التالي :

س	١	٣	٤	٦	٨	٩	١١	١٤
ص	١	٢	٤	٤	٥	٧	٨	٩

جدول (٢–١٨)

الحـــل :

نكون الجدول (٢–١٩) كما يلي :

	$\text{س}_{\text{ر}}$	$\text{ص}_{\text{ر}}$	$\text{س}^{٢}_{\text{ر}}$	$\text{ص}^{٢}_{\text{ر}}$	$\text{س}_{\text{ر}} \times \text{ص}_{\text{ر}}$
	١	١	١	١	١
	٣	٢	٩	٤	٦
	٤	٤	١٦	١٦	١٦
	٦	٤	٣٦	١٦	٢٤
	٨	٥	٦٤	٢٥	٤٠
	٩	٧	٨١	٤٩	٦٣
	١١	٨	١٢١	٦٤	٨٨
	١٤	٩	١٩٦	٨١	١٢٦
المجموع	٥٦	٤٠	٥٢٤	٢٥٦	٣٦٤

جدول (٢–١٩)

$$\text{ر} = \frac{\text{ن} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \times \text{ص}_{\text{ر}} - \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}} \times \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}}{\sqrt{\left[\text{ن} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}^{٢}_{\text{ر}} - \left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}\right)^{٢}\right]\left[\text{ن} \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}^{٢}_{\text{ر}} - \left(\sum_{\text{ر}=١}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}\right)^{٢}\right]}}$$

$$= \frac{٨ \times ٣٦٤ - (٥٦ \times ٤٠)}{\sqrt{\left[٨ \times ٥٢٤ - (٥٦)^{٢}\right]\left[٨ \times ٢٥٦ - (٤٠)^{٢}\right]}}$$

$$= \frac{٢٩١٢ - ٢٢٤٠}{\sqrt{(٤١٩٢ - ٣١٣٦)(٢٠٤٨ - ١٦٠٠)}} = \frac{٦٧٢}{٦٨٧{,}٨} \approx ٠{,}٩٨$$

معامل ارتباط سبيرمان للرتب :

يعرف معامل سبيرمان على أنه ارتباط بين متغيرين كل منهما يقع على مقياس رتبي مثل معامل الارتباط بين رتبة مستوى النشاط الرياضي (س) لطالب في مجموعة معينة، ورتبة مستوى نشاطه الفني (ص) في المجموعة نفسها .

ونرمز لهذا المعامل بالرمز (م) للتمييز بينه وبين معامل بيرسون .

ولحساب معامل ارتباط سبيرمان نستخدم العلاقة :

$$\text{ر} = 1 - \frac{6 \text{ مجـ } \text{ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$$

حيث ف الفرق بين رتبة س ، رتبة ص ، ن عدد المشاهدات .

ولتسهيل حساب معامل ارتباط الرتب بين قيم س ، ص نرتب قيم كل من س ، ص تصاعدياً أو تنازلياً .

مثال (٢ - ١٤)

أوجـد معـامـل ارتـبـاط سبيرمـان للرتب بين المتغـيرين س ، ص والموضـح بياناتهـما فـي الجدول (٢–٢٠) التالي :

س	٤	٧	٨	٦	٥	١
ص	٢	٦	٧	٧	٤	٨

جدول (٢–٢٠)

الحــــل :

نكون جدول (٢–٢١) كما يلي :

مسلسل	قيم س مرتبة تصاعدياً	رتبة س	قيم ص مرتبة تصاعدياً	رتبة ص
١	١	١	٢	١
٢	٤	٢	٤	٢
٣	٥	٣	٦	٣
٤	٦	٤	٧	٤,٥
٥	٧	٥	٧	٤,٥
٦	٨	٦	٨	٦

جدول (٢–٢١)

نلاحظ أنه عند ترتيب قيم ص أن القيمة ٧ تكررت مرتين ، ولإيجاد رتبة القيمة ٧ نقسم مجموع الأرقام المتسلسلة المقابلة للعدد ٧ المتكرره على عدد التكرارات وعليه فإن رتبة القيمة ٧ هي : $\frac{٤ + ٥}{٢} = ٤,٥$.

ثم نكون الجدول (٢–٢٢) التالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	ف = رتبة س – رتبة ص	$ف^٢$
٤	٢	٢	١	١	١
٧	٦	٥	٣	٢	٤
٨	٧	٦	٤,٥	١,٥	٢,٢٥
٦	٧	٤	٤,٥	–٠,٥	٠,٢٥
٥	٤	٣	٢	١	١
١	٨	١	٦	–٥	٢٥
المجموع					٣٣,٥٠

جدول (٢ – ٢٢)

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^٢}{ن(ن^٢ - ١)} = ١ - \frac{٦ \times ٣٣,٥٠}{٦(٣٦ - ١)} = ١ - \frac{٢٠١}{٢١٠} \approx ٠,٠٤$$

يتضح أن معامل الارتباط للرتب بين س ، ص ضعيف جداً .

مثال (٢ – ١٥)

الجدول (٢–٢٣) يوضح درجات عشرة طلاب في مادتي الجغرافية (س) ، والإحصاء (ص) . علماً بأن الدرجة من عشرين .

درجات الجغرافية (س)	١٩	١٨	١٢	١٨	٨	٩	١٧	٥	١٠	١٦
درجات الاحصاء (ص)	١٧	١٨	١٢	١٦	١٢	١٣	١٦	٨	٨	١٥

جدول (٢–٢٣)

احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين درجات الجغرافيا ودرجات الإحصاء ، للطلاب باستخدام الترتيب التنازلي للدرجات .

الحل :

نرتب قيم س ، ص تنازلياً كما في الجدول (٢ – ٢٤) التالي :

مسلسل	قيم س	ترتيب قيم س	قيم ص	ترتيب قيم ص
١	١٩	١	١٨	١
٢	١٨	٢,٥	١٧	٢
٣	١٨	٢,٥	١٦	٣,٥
٤	١٧	٤	١٦	٣,٥
٥	١٦	٥	١٥	٥
٦	١٢	٦	١٣	٦
٧	١٠	٧	١٢	٧,٥
٨	٩	٨	١٢	٧,٥
٩	٨	٩	٨	٩,٥
١٠	٥	١٠	٨	٩,٥

جدول (٢–٢٤)

ثم نكوّن الجدول (٢–٢٥) التالي :

قيم س	قيم ص	رتبة س	رتبة ص	ف = (رتبة س – رتبة ص)	ف^{٢}
١٩	١٧	١	٢	−١	١
١٨	١٨	٢,٥	١	١,٥	٢,٢٥
١٢	١٢	٦	٧,٥	−١,٥	٢,٢٥
١٨	١٦	٢,٥	٣,٥	−١	١
٨	١٢	٩	٧,٥	١,٥	٢,٢٥
٩	١٣	٨	٦	٢	٤
١٧	١٦	٤	٣,٥	٠,٥	٠,٢٥
٥	٨	١٠	٩,٥	٠,٥	٠,٢٥
١٠	٨	٧	٩,٥	−٢,٥	٦,٢٥
١٦	١٥	٥	٥	٠	٠
المجموع					١٩,٥

$$ر = ١ - \frac{٦ \text{ مجـ } ف^{٢}}{د\,(د^{٢} - ١)} \quad ، \quad د = ١٠$$

$$ر = ١ - \frac{٦ \times ١٩,٥}{١٠\,(١٠٠ - ١)} = ١ - \frac{١١٧}{٩٩٠} = ١ - ٠,١٢ = ٠,٨٨ \quad .$$

تمارين ومسائل (٢ - ٢)

[١] الجدول (٢–٢٦) التالي يمثل درجات ٨ طلا ب في اختباري مادتي الرياضيات ، واللغة العربية .

درجات الرياضيات	٧	١٢	١٥	١٧	١٤	١٨	١٩	١٠
درجات اللغة العربية	١٠	١٤	٩	١٩	١٣	١٧	١٧	١٢

الجدول (٢–٢٦)

ارسم شكل الانتشار، وبين نوع الارتباط بين درجات الطلبة في كل من هاتين المادتين .

[٢] فسر طبيعة الارتباط بين المتغيرين س ، ص لكل حالة مما يأتي :

أ) ٠,٩٤ . ب) –٠,٨٦ . جـ) ٠,٥٢ . د) –٠,٢٢ . هـ) ٠,٣٢ . و) صفر .

[٣] الجدول (٢–٢٧) التالي يمثل درجات عشرة طلاب في كل من مادتي الرياضات والعلوم :

الرياضيات (س)	٥٤	٤٩	٤٨	٤٢	٢٤	٥٣	٥٥	٦٢	٦٥	٧٨
العلوم (ص)	٥٧	٤٧	٥٢	٣٢	٢٨	٥٣	٥٥	٥٨	٦٧	٨١

الجدول (٢ – ٢٧)

أ) ارسم شكل الانتشار للمتغيرين س ، ص . ب) احسب معامل ارتباط بيرسون بين المتغيرين س ، ص .

[٤] الجدول (٢ – ٢٨) التالي يوضح العمر (س) وضغط الدم (ص) لثمانية أشخاص .

العمر (س)	٥٦	٤٢	٧٢	٦٣	٥٥	٤٩	٣٨	٤٢
ضغط الدم (ص)	١٤٧	١٢٥	١٦٠	١١٨	١٥٠	١١٥	١٠٥	١١٠

الجدول (٢ – ٢٨)

أ) احسب معامل ارتباط بيرسون س ، ص . ب) احسب معامل سبيرمان للرتب بين س ، ص .

[٥] الجد ول (٢–٢٩) التالي يوضح أوزان عينة مكونة من ٨ آباء (س) وأكبر الأبناء (ص) .

الوزن (س) للأب	٦٦	٦٥	٧٢	٦٣	٧٤	٨٢	٦٩	٧٥
الوزن (ص) للأبن	٤٧	٥٠	٦٠	٤٩	٥٨	٦٢	٥٥	٥٩

الجدول (٢–٢٩)

أ) احسب معامل ارتباط بيرسون بين س ، ص . ب) احسب معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين س ، ص .

[٦] أوجد معامل ارتباط بيرسون ومعامل ارتباط سبيرمان للرتب لقيم المشاهدات التالية :

أ)

س	٤	٨	١٠	١٢	١٤	١٦
ص	١٢	٨	٧	٥	٣	١

جدول (٢–٣٠)

ب)

س	٤	٦	٧	١٠	١٢	١٤
ص	٥	٤	٨	١٢	٨	١٠

جدول (٢–٣١)

٢ - ٣ الانحـــــدار

تعلم أن المعادلة ص = أ س + ب تمثل خطاً مستقيماً ، وأن (أ) يمثل ميل هذا المستقيم ، أي ظل الزاوية التي يصنعها هذا المستقيم مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وأن (ب) تمثل الجزء المقطوع من محور الصادات ونسمي هذه المعادلة **معادلة خط الانحدار** (أو للتبسيط **معادلة الانحدار**) .

مفهوم الانحدار :

من أهم أغراض دراسة الانحدار هو التنبؤ بقيمة متغير ما بمعرفة قيمة متغير آخر . يسمى المتغير المعلوم بالمتغير المستقل والمتغير المراد معرفة قيمته بالمتغير التابع ونرمز عادة للمتغيرين بالرمز س ، ص .

الانحدار الخطي :

في الانحدار الخطي يرتبط المتغيرين س ، ص بعلاقة خطية، ويتم التنبؤ بإحداهما من خلال معرفة الآخر .

إذا أردنا التنبؤ بقيمة (ص) من خلال معرفة قيمة (س) نستخدم المعادلة الخطية : ص = أ س + ب ، وتسمى هذه المعادلة معادلة انحدار ص على س أو معادلة انحدار ص بدلالة س . أما إذا أردنا التنبؤ بقيمة س من خلال معرفة قيمة ص نستخدم المعادلة الخطية س = أ ص + ب ، وتسمى هذه المعادلة معادلة انحدار س على ص أو معادلة انحدار س بدلالة ص .

لاحظ في معادلة الانحدار ص = أ س + ب ، أو س = أ ص + ب يتطلب منا حساب الثابتين أ ، ب على أساس البيانات المتوفرة للمتغيرين س ، ص .

ويسمى الثابتين أ ، ب بمعاملي الانحدار . ومما يجدر الإشارة إليه أن استخراج قيمة أ شرط مسبق لاستخراج قيمة ب .

في حالة التنبؤ بقيمة (ص) من خلال قيمة س فإن :

$$\text{أ} = \frac{\text{ن}\,\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} \times \text{ص}_{\text{ر}}) - (\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}})(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}})}{\text{ن}\,\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}}^{2} - (\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}})^{2}} \quad ، \quad \text{ب} = \bar{\text{ص}} - \text{أ}\,\bar{\text{س}}$$

وفي حالة التنبؤ بقيمة (س) من خلال قيمة ص ، فإن :

$$\text{أ} = \frac{\text{ن}\,\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}} \times \text{ص}_{\text{ر}}) - (\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ر}})(\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}})}{\text{ن}\,\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}}^{2} - (\sum_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} \text{ص}_{\text{ر}})^{2}} \quad ، \quad \text{ب} = \bar{\text{س}} - \text{أ}\,\bar{\text{ص}}$$

العلاقة بين معامل الانحدار ومعامل الارتباط :

العلاقة بين معامل انحدار ص على س ومعامل الارتباط للمتغيرين س ، ص يعرف بالعلاقة :

$$أ = ر \times \frac{ع_ص}{ع_س}$$

حيث أ معامل انحدار ص على س ، ر معامل الارتباط بين س ، ص .
$ع_ص$ الانحراف المعياري لقيم ص ، $ع_س$ الانحراف المعياري لقيم س .

في حالة انحدار س على ص ، فإن : $أ = ر \times \frac{ع_س}{ع_ص}$.

مثال (٢ – ١٦)

إذا كانت $\bar{س}$ = ٧٠ ، $ع_س$ = ١٥ ، $\bar{ص}$ = ٨٠ ، $ع_ص$ = ١٢ ، ر = ٠,٧ .
اكتب معادلة انحدار ص على س ، ثم أوجد قيمة ص عندما س = ٦٠ .

الحـــل :

معادلة انحدار ص على س هي : ص = أ س + ب

في حالة انحدار ص على س ؛ فإن : $أ = ر \times \frac{ع_ص}{ع_س} = ٠,٧ \times \frac{١٢}{١٥} = ٠,٧ \times ٠,٨ = ٠,٥٦$

ب = $\bar{ص}$ – أ $\bar{س}$ = ٨٠ – ٠,٥٦ × ٧٠ = ٨٠ – ٣٩,٢٠ = ٤٠,٨

∵ معادلة انحدار ص على س هي :

ص = أ س + ب ، أ = ٠,٥٦ ، ب = ٤٠,٨ ، س = ٦٠

∴ ص = ٠,٥٦ × ٦٠ + ٤٠,٨ = ٧٤,٤ .

مثال (٢ – ١٧)

إذا كانت $\bar{س}$ = ٢٠ ، $\bar{ص}$ = ٢٥ ، $ع_س$ = ٨ ، $ع_ص$ = ٥ ، ر = ٠,٨ .
اكتب معادلة انحدار س على ص ، ثم أوجد قيمة س عندما ص = ٣٠ .

الحـــل :

معادلة انحدار س على ص هي :

س = أ ص + ب

في حالة انحدار س على ص فإن : $أ = ر \times \frac{ع_س}{ع_ص} = ٠,٨ \times \frac{٨}{٥} = ١,٢٨$

ب = $\bar{س}$ – أ $\bar{ص}$ = ٢٠ – ١,٢٨ × ٢٥ = –١٢

∵ معادلة انحدار س على ص هي :

س = ؙ ص + ب ، ؙ = ١,٢٨ ، ص = ٣٠ ، ب = −١٢ .

س = ١,٢٨ × ٣٠ + (−١٢) = ٢٦,٤ .

مثال (٢ − ١٨)

إذا كانت درجات خمسة طلاب في مادتي الكيمياء والفيزياء معطاة بالجدول (٢−٣٢) التالي ، علماً بأن الدرجات من عشرين :

درجة الكيمياء (س)	١٥	١٦	١٧	١٨	١٩
درجة الفيزياء (ص)	١٤	١٣	١٤	١٨	١٩

جدول (٢−٣٢)

المطلوب إيجاد :

أ) معادلة انحدار ص على س .

ب) معادلة انحدار س على ص .

جـ) أوجد درجة الطالب خالد في مادة الكيمياء إذا كانت درجته في الفيزياء ١٠ درجات .

د) أوجد درجة الطالبة ليلى في مادة الفيزياء إذا كانت درجتها في الكيمياء ١٤ درجة .

الحـــل :

أولاً− نكون الجدول (٢−٣٣) التالي :

درجة الكيمياء (س)	درجة الفيزياء(ص)	س × ص	$س^{٢}$	$ص^{٢}$
١٥	١٤	٢١٠	٢٢٥	١٩٦
١٦	١٣	٢٠٨	٢٥٦	١٦٩
١٧	١٤	٢٣٨	٢٨٩	١٩٦
١٨	١٨	٣٢٤	٣٢٤	٣٢٤
١٩	١٩	٣٦١	٣٦١	٣٦١
٨٥	٧٨	١٣٤١	١٤٥٥	١٢٤٦

جدول (٢−٣٣)

$$\therefore \quad \bar{س} = \frac{٨٥}{٥} = ١٧ \quad ، \quad \bar{ص} = \frac{٧٨}{٥} = ١٥,٦$$

أ) في حالة انحدار ص على س فإن :

$$أ = \frac{ن \sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - (\sum_{ر=1}^{ن} س_ر)(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر)}{ن \sum_{ر=1}^{ن} س_ر^2 - (\sum_{ر=1}^{ن} س_ر)^2}$$

$$= \frac{٥ \times ١٣٤١ - ٨٥ \times ٧٨}{٥ \times ١٤٥٥ - ٨٥ \times ٨٥} = \frac{٦٧٠٥ - ٦٦٣٠}{٧٢٧٥ - ٧٢٢٥} = ١,٥$$

$ب = \bar{ص} - أ \bar{س} = ١٥,٦ - ١,٥ \times ١٧ = -٩,٩$

معادلة انحدار ص على س هي :

$ص = أ س + ب \quad \Leftarrow \quad ص = ١,٥ س - ٩,٩$

ب) في حالة انحدار س على ص فإن :

$$أ = \frac{ن \sum_{ر=1}^{ن} س_ر ص_ر - (\sum_{ر=1}^{ن} س_ر)(\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر)}{ن \sum_{ر=1}^{ن} ص_ر^2 - (\sum_{ر=1}^{ن} ص_ر)^2}$$

$$= \frac{٥ \times ١٣٤١ - ٨٥ \times ٧٨}{٥ \times ١٢٤٦ - ٧٨ \times ٧٨} = \frac{٧٥}{١٤٦} = ٠,٥$$

$ب = \bar{س} - أ \bar{ص} = ١٧ - ٠,٥ \times ١٥,٦ = ٩,٢$

معادلة انحدار س على ص هي :

$س = أ ص + ب \quad \Leftarrow \quad س = ٠,٥ ص + ٩,٢$

جـ) عندما تكون درجة خالد في الفيزياء (ص) ١٠ درجات ؛ فإن درجته في الكيمياء (س)

$س = ٠,٥ ص + ٩,٢ = ٠,٥ \times ١٠ + ٩,٢ = ١٤,٢$ درجة

د) عندما تكون درجة ليلي في الكيمياء (س) ١٤ ؛ فإن درجتها في الفيزياء (ص)

$ص = ١,٥ س - ٩,٩$

$= ١,٥ \times ١٤ - ٩,٩ = ١١,١$ درجة .

تمارين ومسائل (٢-٣)

[١] إذا علمت أن $\bar{س} = ٥٠$ ، $\bar{ص} = ١٠٠$ ، $ع_س = ١٥$ ، $ع_ص = ٢٠$ ، $ر = ٠,٧٠$.

احسب :

أ) القيمة المتوقعة لـ ص عندما تكون قيمة س = ٨٢ .

ب) القيمة المتوقعة لـ س عندما تكون قيمة ص = ٧٥ .

[٢] ليكن لدينا البيانات التالية :

س	٢	٤	٥	٦	٨	١١
ص	١٨	١٢	١٠	٨	٧	٥

جدول (٢– ٣٤)

أوجد معادلة انحدار ص على س ثم أوجد قيمة ص عندما س = ١٣

[٣] رغبت إِحدى الشركات في التعريف على جودة إِنتاجها من السمن فسحبت عينة عشوائية (س) من علب السمن وتم فحصها وتحديد العيوب الموجودة بكل علبة (ص) فكانت البيانات المبينة في الجدول (٢–٣٥) التالي :

عدد العلب (س)	٦٠	٤٨	٣٦	٢٤	٢٠	١٦
عدد العيوب (ص)	٦	٥	٣	٢	٢	٠

جدول (٢–٣٥)

أوجد :

أ) معادلة انحدار ص على س .

ب) قدِّر عدد العيوب الممكن ظهورها في عدد ١٥٠ علبة من السمن .

[٤] قام مدرس بإِجراء اختبارين لعشرة طلاب الأول في الفلسفة (س) والثاني في المنطق (ص) ، وكانت درجات الاختبارين كما هي مبينة في الجدول (٢–٣٦) التالي :

الاختبار الأول (س)	٧	٩	٤	١٠	٦	٧	٨	٨	٥	٦
الاختبار الثاني (ص)	٦	٨	٦	١٠	٨	٥	١٠	٧	٧	٨

الجدول (٢–٣٦)

أوجد : أ) معادلة انحدار ص على س .

ب) معادلة انحدار س على ص .

جـ) معامل الارتباط لانحدار ص على س .

[٥] الجدول (٢–٣٧) التالي يوضح العمر (س)، وضغط الدم (ص) لثمانية أشخاص :

العمر (س)	٥٦	٧٢	٤٢	٦٣	٦٨	٣٨	٦٠	٤٩
ضغط الدم (ص)	١٥٥	١٤٠	١٢٥	١٤٥	١٤٧	١١٥	١٤٢	١٣٨

الجدول (٢–٣٧)

أوجد : أ) معادلة انحدار ص على س .

ب) قدِّر ضغط الدم لشخص عمره ٥٣ سنة .

[٦] ليكن لدينا الجدول (٢–٣٨) التالي :

	١٥	١٤	١٠	٩	٨	٨	٧	٦	٤	٢
	٤	٦	٤	٨	٧	٨	١٠	٩	١٤	١٢

جدول (٢–٣٨)

أوجد :

أ) معامل ارتباط بيرسون س ، ص .

ب) معامل ارتباط سبيرمان للرتب بين س ، ص .

جـ) معامل انحدار ص على س .

د) معامل انحدار س على ص .

الوحدة الثالثة التكامل

٣ - ١ التكامل غير المحدّد

تعلم أن هناك عمليات متعاكسة مثل الطرح والجمع ، والقسمة والضرب، وبالمثل فإن هناك عملية عكسية للاشتقاق وهي عملية التكامل .

وعلى هذا الأساس فإننا في عملية التكامل نبحث عن الدالة الأصلية التي أعطي لنا مشتقتها الأولى .

فمثلاً : إذا كان ل (س) = $س^٣ + ٥$ ، د(س) = ٣ $س^٢$ ، فإن $\frac{ء}{ء س}$ ل (س) = ٣ $س^٢$.

أي أن : لَ(س) = ٣ $س^٢$.

∴ لَ(س) = د (س) .

وفي هذه الحالة نقول إن ل(س) دالة أصلية للدالة د(س) .

تعريف (٣ - ١)

إذا كانت الدالة د(س) معرفة على الفترة ف ⊂ ح ، فإن كل دالة ل تحقق العلاقة :
لَ(س) = د(س) ، ∀ س ∈ ف تسمى دالة أصلية أو « تكامل » للدالة د(س) على ف
ونكتب ذلك بالصورة ل (س) = ∫ د(س) ء س .

ملاحظة :

* الصورة ∫ د(س) ء س تقرأ تكامل الدالة د(س) بالنسبة لـ س .
* الرمز ∫ علامة التكامل ، د(س) الدالة المكاملة ، ء س يحدد متغير التكامل .
* من التعريف يتضح أن الدالة ل متصلة، وقابلة للاشتقاق على ف .
* سنعتبر كل الدوال المراد تكاملها في هذا البند متصلة .

تدريب(٣ - ١)

لتكن د(س) = ٣ $س^٢$. ما هي الدالة الأصلية لـ د(س) ؟

ستجد أن كلاً من الدوال التالية :

$ل_١$ (س) = $س^٣$ ، $ل_٢$ (س) = $س^٣ + ١$ ، $ل_٣$ (س) = $س^٣ - ٥$.

دوال أصلية للدالة د(س) لأن : $لَ_١$ (س) = $لَ_٢$ (س) = $لَ_٣$ (س) = د(س)

وفي الحقيقية لأي عدد حقيقي ث ∈ ح نجد أن :

ل (س) = $س^٣$ + ث هي دالة أصلية للدالة د(س) .

أي أن : $\int ٣ س^٢ \, ء س = س^٣ + ث$ حيث العدد ث يسمى ثابت التكامل .

مثال (٣ - ١)

أوجد الدالة الأصلية لكل من الدوال الآتية :

أ) د(س) = ٥ . ب) د(س) = ٥ $س^٤$. جـ) د(ع) = $ع^٣$.

الحـــل :

أ) $\int د(س) \, ء س = \int ٥ \, ء س = ٥ س + ث$ ؛ لأن $\frac{ء}{ء س}(٥ س + ث) = ٥$.

ب) $\int ٥ س^٤ \, ء س = س^٥ + ث$ ؛ لأن $\frac{ء}{ء س}(س^٥ + ث) = ٥ س^٤$.

جـ) $\int ع^٣ \, ء ع = \frac{ع^٤}{٤} + ث$ ؛ لأن $\frac{ء}{ء س}\left(\frac{ع^٤}{٤} + ث \right) = \frac{\cancel{٤} ع^٣}{\cancel{٤}} = ع^٣$.

وبناءً على ما سبق نقدم القاعدة التالية :

$$\int س^{ن} \, ء س = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث \quad \text{حيث} \quad ن \neq -١ \ .$$

فمثلاً : $\int س^٥ \, ء س = \frac{س^٦}{٦} + ث$ ،

$$\int س^{\frac{٣}{٢}} \, ء س = \frac{س^{\frac{٣}{٢}+١}}{\frac{٣}{٢}+١} + ث = \frac{س^{\frac{٥}{٢}}}{\frac{٥}{٢}} + ث = \frac{٢}{٥} س^{\frac{٥}{٢}} + ث \ .$$

خواص التكامل :

١ - $\int دَ(س) \, ء س = د(س) + ث$

٢ - $\frac{ء}{ء س} \int د(س) \, ء س = د(س)$

٣ - $\int أ \, د(س) \, ء س = أ \int د(س) \, ء س$ ، $أ \in ح$

٤ - $\int (د_١(س) \pm د_٢(س)) \, ء س = \int د_١(س) \, ء س \pm \int د_٢(س) \, ء س$

مثال (٣ - ٢)

احسب التكاملات التالية :

أ) $\int (6س^{2} - 2س + 5)\, ءس$.

ب) $\int (س^{3} - 2س^{2} - 7س^{\frac{5}{3}})\, ءس$.

جـ) $\int س\,(س^{2} - \frac{3}{س} + \frac{5}{س^{3}})\, ءس$.

الحـــل :

أ) استناداً إلى قاعدة التكامل و إلى الخاصيتين : ٣ ، ٤ .

$$\int (6س^{2} - 2س + 5)\, ءس = 6\int س^{2}\, ءس - 2\int س\, ءس + \int 5\, ءس$$

$$= 6 \times \frac{س^{3}}{3} + ث_{1} - 2 \times \frac{س^{2}}{2} + ث_{2} + 5س + ث_{3} = 2س^{3} - س^{2} + 5س + (ث_{1} + ث_{2} + ث_{3})$$

$$= 2س^{3} - س^{2} + 5س + ث \quad ، \quad \text{حيث} \quad ث_{1} + ث_{2} + ث_{3} = ث \; .$$

ب) $$\int (س^{3} - 2س^{2} - 7س^{\frac{5}{3}})\, ءس = \int س^{3}\, ءس - 2\int س^{2}\, ءس - 7\int س^{\frac{5}{3}}\, ءس$$

$$= \frac{س^{4}}{4} - 2 \times \frac{س^{3}}{3} - 7 \times \frac{س^{\frac{5}{3}+1}}{\frac{5}{3}+1} + ث = \frac{س^{4}}{4} - \frac{2}{3}س^{3} - 7 \times \frac{3}{8}س^{\frac{8}{3}} + ث$$

$$= \frac{1}{4}س^{4} - \frac{2}{3}س^{3} - \frac{21}{8}س^{\frac{8}{3}} + ث \; .$$

جـ) $$\int س\,(س^{2} - \frac{3}{س} + \frac{5}{س^{3}})\, ءس = \int (س^{3} - 3 + \frac{5}{س^{2}})\, ءس$$

$$= \int (س^{3} - 3 + 5س^{-2})\, ءس = \frac{س^{4}}{4} - 3س + 5 \times \frac{س^{-1}}{-1} + ث = \frac{1}{4}س^{4} - 3س - \frac{5}{س} + ث \; .$$

مثال (٣ - ٣)

احسب التكاملات التالية :

أ) $\int (س^{2} - 3)^{2}\, ءس$.

ب) $\int (2س - \sqrt{س} + \frac{1}{\sqrt[3]{س}})\, ءس$.

جـ) $\int (\frac{س^{2} - 3س + \sqrt[3]{س}}{\sqrt{س}})\, ءس$.

الحـــل :

أ) $$\int (س^{2} - 3)^{2}\, ءس = \int (س^{4} - 6س^{2} + 9)\, ءس = \frac{س^{5}}{5} - 6\,\frac{س^{3}}{3} + 9س + ث$$

$$= \frac{1}{5}س^{5} - 2س^{3} + 9س + ث \; .$$

ب) $\int \left(2\text{س} - \sqrt{\text{س}} + \frac{1}{\sqrt[3]{\text{س}}} \right) \text{ء س} = \int \left(2\text{س} - \text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{\frac{-1}{3}} \right) \text{ء س}$

$$= \frac{2\text{س}^2}{2} - \frac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{\text{س}^{-\frac{1}{3}+1}}{-\frac{1}{3}+1} + \text{ث} = \text{س}^2 - \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\text{س}^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} + \text{ث}$$

$$= \text{س}^2 - \frac{2}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{3}{2}\text{س}^{\frac{2}{3}} + \text{ث} \ .$$

جـ) $\int \left(\frac{\text{س}^2 - 3\text{س} + \sqrt[3]{\text{س}}}{\sqrt{\text{س}}} \right) \text{ء س} = \int \text{س}^{-\frac{1}{2}} \left(\text{س}^2 - 3\text{س} + \text{س}^{\frac{1}{3}} \right) \text{ء س}$

$$= \int \left(\text{س}^{2-\frac{1}{2}} - 3\text{س}^{1-\frac{1}{2}} + \text{س}^{\frac{1}{3}-\frac{1}{2}} \right) \text{ء س} = \int \left(\text{س}^{\frac{3}{2}} - 3\text{س}^{\frac{1}{2}} + \text{س}^{-\frac{1}{6}} \right) \text{ء س}$$

$$= \frac{\text{س}^{\frac{3}{2}+1}}{\frac{3}{2}+1} - 3\frac{\text{س}^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + \frac{\text{س}^{-\frac{1}{6}+1}}{-\frac{1}{6}+1} + \text{ث} = \frac{\text{س}^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} - 3\frac{\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{\text{س}^{\frac{5}{6}}}{\frac{5}{6}} + \text{ث}$$

$$= \frac{2}{5}\text{س}^{\frac{5}{2}} - 2\text{س}^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{5}\text{س}^{\frac{5}{6}} + \text{ث} \ .$$

مثال (٣ - ٤)

أ) إذا علمت أن: $\text{د}'(\text{س}) = \text{س} + \frac{1}{\text{س}^2}$ ، فأوجد د(س) علماً أن منحنى الدالة يمر بالنقطة (−٢ ، ٧).

ب) أوجد الدالة الأصلية ق(س) للدالة $\text{د}(\text{س}) = \text{س}^2 + \text{س} - 1$ إذا علمت أن: $\text{ق}(1) = 5$

الحــــل :

أ) $\text{د}(\text{س}) = \int \text{د}'(\text{س}) \text{ ء س} = \int \left(\text{س} + \frac{1}{\text{س}^2} \right) \text{ء س} = \int \left(\text{س} + \text{س}^{-2} \right) \text{ء س}$

$$\text{د}(\text{س}) = \frac{\text{س}^2}{2} + \frac{\text{س}^{-1}}{-1} + \text{ث} = \frac{\text{س}^2}{2} - \frac{1}{\text{س}} + \text{ث} \ ،$$

∵ المنحنى يمر بالنقطة (−٢ ، ٧) فهي تحقق معادلته:

$$\text{د}(-2) = \frac{(-2)^2}{2} - \frac{1}{-2} + \text{ث} = 7 \quad \Leftarrow \quad \frac{4}{2} + \frac{1}{2} + \text{ث} = 7$$

$$\Leftarrow \frac{5}{2} + \text{ث} = 7 \quad \Leftarrow \quad \text{ث} = 7 - \frac{5}{2} = \frac{14 - 5}{2} = \frac{9}{2}$$

$$\therefore \text{د}(\text{س}) = \frac{1}{2}\text{س}^2 - \frac{1}{\text{س}} + \frac{9}{2}$$

ب) $ق(س) = \int (س^{٢} + س - ١) \, ء س = \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} - س + ث$

$\because ق(١) = ٥$ ،

$\therefore \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ١ + ث = ٥ \Leftarrow \frac{٢ + ٣ - ٦}{٦} + ث = ٥ \Leftarrow \frac{-١}{٦} + ث = ٥$

$ث = ٥ + \frac{١}{٦} \Leftarrow ث = \frac{٣٠ + ١}{٦} = \frac{٣١}{٦}$

$\therefore ق(س) = \frac{س^{٣}}{٣} + \frac{س^{٢}}{٢} - س + \frac{٣١}{٦}$.

تمارين ومسائل (٣-١)

[١] أكمل الجدول (٣ – ١) التالي :

الدالة دَ(س)	الدالة الأصلية (د(س))
$س^{٤}$	$\frac{س^{٥}}{٥} + ث$
...	$س^{٣} + ٢س + ٥$
$٥س^{٤}$	...
$س^{٢} + ٧$	...
$٦س^{٢} - ٤س + ٣$	...
...	$س^{\frac{٥}{٣}} - ٢س$
$س^{\frac{١}{٣}} + \sqrt{س}$	...
...	$\sqrt[٣]{س} - \frac{٢}{س^{٢}}$
$\frac{١}{\sqrt[٣]{س}} + \frac{٢}{\sqrt{س}}$	...

جدول (٣ – ١)

[٢] احسب التكاملات التالية :

أ) $\int (٣س^{٢} - ٤س) \, ء س$.

ب) $\int (س^{٣} + ٣س^{٢} + ٥) \, ء س$.

جـ) $\int (٣ع - \frac{٥}{ع^{٢}}) \, ء ع$.

د) $\int (\frac{١}{ز^{٤}} + \frac{٣}{ز^{٣}} - ٥) \, ء ز$.

هـ) $\int$ س (س^{٢} − ٣ س + $\sqrt{\text{س}}$) ء س .

و) $\int$ (٢ $\sqrt{\text{س}}$ − ٣ س^{٢}) ء س .

ز) $\int$ $\sqrt{\text{س}}$ (س − $\sqrt[٣]{\text{س}}$) ء س .

ح) $\int$ $\sqrt{\text{س}}$ (س^{٢} − ٢ س + ١) ء س .

ط) $\int$ (٢ س + ٣)^{٢} ء س .

ي) $\int$ ($\frac{١}{\text{ع}}$ − ع)^{٢} ء ع .

ك) $\int$ ($\frac{\text{س} - ٣}{\sqrt[٣]{\text{س}}}$) ء س .

ل) $\int$ $\sqrt[٣]{\text{س}}$ (س − $\frac{١}{\sqrt{\text{س}}}$)^{٢} ء س .

[٣] أثبت أن الدالة ل (س) = س$^{-٣}$ دالة أصلية للدالة د(س) = $\frac{-٣}{\text{س}^{٤}}$.

[٤] إذا كانت $\frac{\text{ء ص}}{\text{ء س}}$ = −٥ س^{٢} + ٢ ، فأوجد الدالة ص التي تمر بالنقطة (١ ، ٣) .

[٥] لتكن دَ(س) = ٣ س^{٢} − ٢ س + ١ ، ومنحنى الدالة د (س) يمر بالنقطة (−٢، ٥) ؛ فأوجد د(س) .

[٦] إذا علمت أن ل (س) هي الدالة الأصلية للدالة د (س) = س^{٢} − س + ١ ، وكان ل (١) = ٢ .
أوجد الدالة ل (س) .

٣ − ٢ التكامل المحدّد

تعلم أن $\int$ د(س) ء س هو التكامل غير المحدّد للدالة د(س) بالنسبة لـ س بينما :

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د(س) ء س يسمى بالتكامل المحدّد للدالة د(س) بالنسبة لـ س من س = أ إلى س = ب . لأن قيمته محدّدة ؛ ويسمى أ بالحد الأدنى للتكامل ، ب بالحد الأعلى للتكامل .

وتمكننا المبرهنة التالية من حساب التكامل المحدّد عن طريق حساب قيمتي تكامل غير محدّد للدالة القابلة للتكامل على فترة التكامل .

مبرهنة (٣ − ١)

إذا كانت الدالة د (س) متصلة على [أ ، ب] ، وكان ل تكاملاً لـ د (س)على هذه الفترة فإن
$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د (س) ء س = ل (ب) − ل (أ) .

ملاحظة :

جرت العادة أن نستخدم الرمز ل (س) $\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ = ل (ب) − ل (أ) ، وعلى هذا فإن :

$\int_{\text{أ}}^{\text{ب}}$ د(س) ء س = ل (س) $\Big|_{\text{أ}}^{\text{ب}}$

فمثلاً :

$\int_{٠}^{٤}$ س^{٣} ء س = $\frac{\text{س}^{٤}}{٤}$ $\Big|_{٠}^{٤}$ = $\frac{(٤)^{٤}}{٤}$ − $\frac{(٠)^{٤}}{٤}$ = $\frac{٢٥٦}{٤}$ − ٠ = ٦٤ ؛

$$\int_{١}^{٩} \sqrt{س}\ ء س = \int_{١}^{٩} س^{\frac{١}{٢}}\ ء س = \frac{٢}{٣} س^{\frac{٣}{٢}} \Big|_{١}^{٩} = \frac{٢}{٣}\left[(٩)^{\frac{٣}{٢}} - ١ \right] = \frac{٢}{٣}\left(٣^{٣} - ١ \right)$$

$$= \frac{٢}{٣} \times ٢٦ = \frac{٥٢}{٣} \ .$$

خواص التكامل المحدّد :

١) إذا تساوى حدي التكامل ، فإن قيمة التكامل تساوي صفراً . أي أن : $\int_{أ}^{أ} د(س)\ ء س = ٠$.

٢) إذا بادلنا بين حدي التكامل فإن إشارة التكامل تتغير .

أي أن : $\int_{ب}^{أ} د(س)\ ء س = - \int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س$.

٣) إذا وجد عدد جـ $\in$ [أ ، ب] وكان أ < جـ < ب ، فإن :

$$\int_{أ}^{ب} د(س)\ ء س = \int_{أ}^{جـ} د(س)\ ء س + \int_{جـ}^{ب} د(س)\ ء س \ .$$

مثال (٣ – ٥)

احسب ما يلي :

أ) $\int_{٠}^{٤} (س^{٢} - ٤س)\ ء س$.

ب) $\int_{١}^{٢} (ع^{٣} - ٢ع)\ ء ع$.

جـ) $\int_{-٢}^{٣} (س^{٢} - ٤س + ٣)\ ء س$.

الحـــل :

أ) $\int_{٠}^{٤} (س^{٢} - ٤س)\ ء س = \left(\frac{س^{٣}}{٣} - ٤\frac{س^{٢}}{٢} \right)\Big|_{٠}^{٤} = \left(\frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} \right)\Big|_{٠}^{٤} = \frac{٦٤}{٣} - ٢ \times ١٦ - ٠$

$$= \frac{٦٤}{٣} - ٣٢ = \frac{٦٤ - ٩٦}{٣} = \frac{-٣٢}{٣} \ .$$

ب) $\int_{١}^{٢} (ع^{٣} - ٢ع)\ ء ع = \left(\frac{ع^{٤}}{٤} - \frac{\cancel{٢}ع^{٢}}{\cancel{٢}} \right)\Big|_{١}^{٢} = \left(\frac{١٦}{٤} - ٤ \right) - \left(\frac{١}{٤} - ١ \right) = ٤ - ٤ - \frac{١}{٤} + ١ = \frac{٣}{٤}$

جـ) $\int_{-٢}^{٣} (س^{٢} - ٤س + ٣)\ ء س = \left(\frac{س^{٣}}{٣} - ٢س^{٢} + ٣س \right)\Big|_{-٢}^{٣}$

$$= \frac{٢٧}{٣} - ١٨ + ٩ - \left(\frac{-٨}{٣} - ٨ - ٦ \right) = \frac{٨}{٣} + ١٤ = \frac{٥٠}{٣} \ .$$

مثال (٣ - ٦)

احسب التكاملات المحدودة التالية :

أ) $\int_{0}^{4} \left(5\sqrt{\text{س}} - \frac{3}{\sqrt{\text{س}}} \right) \text{ءس}$.

ب) $\int_{1}^{8} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{\text{ع}}} - 2\sqrt[3]{\text{ع}} \right) \text{ءع}$.

جـ) $\int_{4}^{9} \left(\frac{\text{ز} + 2}{\sqrt{\text{ز}}} \right) \text{ءز}$.

الحـــل :

أ) $\int_{0}^{4} \left(5\sqrt{\text{س}} - \frac{3}{\sqrt{\text{س}}} \right) \text{ءس} = \int_{0}^{4} \left(5\text{س}^{\frac{1}{2}} - 3\text{س}^{-\frac{1}{2}} \right) \text{ءس} = \left(\frac{5\text{س}^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} - \frac{3\text{س}^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{0}^{4}$.

$$= \left(\frac{10}{3}\text{س}^{\frac{3}{2}} - 6\text{س}^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{0}^{4} = \frac{10}{3}(4)^{\frac{3}{2}} - 6(4)^{\frac{1}{2}} - 0 = \frac{10}{3} \times 2^{3} - 6 \times 2$$

$$= \frac{10}{3} \times 8 - 12 = \frac{80}{3} - 12 = \frac{44}{3} \ .$$

ب) $\int_{1}^{8} \left(\frac{3}{\sqrt[3]{\text{ع}}} - 2\sqrt[3]{\text{ع}} \right) \text{ءع} = \int_{1}^{8} \left(3\text{ع}^{-\frac{1}{3}} - 2\text{ع}^{\frac{1}{3}} \right) \text{ءع}$.

$$= \left(\frac{3\text{ع}^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} - \frac{2\text{ع}^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} \right) \Big|_{1}^{8} = \frac{9}{2}(8)^{\frac{2}{3}} - \frac{3}{2}(8)^{\frac{4}{3}} - \left[\frac{9}{2} \times 1 - \frac{3}{2} \times 1 \right]$$

$$= \frac{9}{2} \times 2^{2} - \frac{3}{2} \times 2^{4} - \frac{9}{2} + \frac{3}{2} = 18 - 24 - 3 = -9 \ .$$

جـ) $\int_{4}^{9} \left(\frac{\text{ز} + 2}{\sqrt{\text{ز}}} \right) \text{ءز} = \int_{4}^{9} \text{ز}^{-\frac{1}{2}} (\text{ز} + 2) \text{ءز}$

$$= \int_{4}^{9} \left(\text{ز}^{\frac{1}{2}} + 2\text{ز}^{-\frac{1}{2}} \right) \text{ءز} = \left(\frac{2}{3}\text{ز}^{\frac{3}{2}} + 4\text{ز}^{\frac{1}{2}} \right) \Big|_{4}^{9}$$

$$= \frac{2}{3}(9)^{\frac{3}{2}} + 4(9)^{\frac{1}{2}} - \left[\frac{2}{3}(4)^{\frac{3}{2}} + 4(4)^{\frac{1}{2}} \right]$$

$$= \frac{2}{3} \times 3^{3} + 4 \times 3 - \left(\frac{2}{3} \times 2^{3} + 4 \times 2 \right) = 18 + 12 - \left(\frac{16}{3} + 8 \right)$$

$$= 30 - 8 - \frac{16}{3} = 22 - \frac{16}{3} = \frac{66 - 16}{3} = \frac{50}{3} \ .$$

مثال (٣ - ٧)

احسب ما يلي :

أ) $\int_{-1}^{3} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س}$ إذا كانت $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^{2} + 3 & \text{عندما } \text{س} \geq 2 \\ 9 - \text{س} & \text{عندما } \text{س} \leq 2 \end{cases}$

ب) $\int_{-2}^{2} |\text{س} + 1|\, \text{ء}\text{س}$.

الحل :

أ) لاحظ أن د(س) معرفة بقاعدتين حول العدد ٢ أي أن: د(س) = ٩ − س عندما س ≤ ٢،

د(س) = س٢ + ٣ عندما س ≥ ٢ ، وبالتالي نستخدم خاصية (٣) من خواص التكامل المحدود.

$$\therefore \int_{-1}^{3} \text{د}(\text{س})\, \text{ء}\text{س} = \int_{-1}^{2} (9 - \text{س})\, \text{ء}\text{س} + \int_{2}^{3} (\text{س}^{2} + 3)\, \text{ء}\text{س}$$

$$= \left(9\text{س} - \frac{\text{س}^{2}}{2}\right)\Big|_{-1}^{2} + \left(\frac{\text{س}^{3}}{3} + 3\text{س}\right)\Big|_{2}^{3} = 18 - \frac{4}{2} - \left(-9 - \frac{1}{2}\right) + \frac{27}{3} + 9 - \left(\frac{8}{3} + 6\right).$$

$$= 18 - 2 + 9 + \frac{1}{2} + 9 + 9 - \frac{8}{3} - 6 = 25 + \frac{1}{2} + 12 - \frac{8}{3} = 37 + \frac{1}{2} - \frac{8}{3}$$

$$= \frac{222 + 3 - 16}{6} = \frac{225 - 16}{6} = \frac{209}{6}.$$

ب) نعيد تعريف الدالة $|\text{س} + 1|$ كما يلي :

$$|\text{س} + 1| = \begin{cases} \text{س} + 1 & \text{عندما } \text{س} \geq -1 \\ -(\text{س} + 1) & \text{عندما } \text{س} \leq -1 \end{cases}$$

$$\therefore \int_{-2}^{2} |\text{س} + 1|\, \text{ء}\text{س} = \int_{-2}^{-1} -(\text{س} + 1)\, \text{ء}\text{س} + \int_{-1}^{2} (\text{س} + 1)\, \text{ء}\text{س}$$

$$= -\left(\frac{\text{س}^{2}}{2} + \text{س}\right)\Big|_{-2}^{-1} + \left(\frac{\text{س}^{2}}{2} + \text{س}\right)\Big|_{-1}^{2} = -\left[\frac{1}{2} - 1 - \left(\frac{4}{2} - 2\right)\right] + \frac{4}{2} + 2 - \left(\frac{1}{2} - 1\right)$$

$$= -\left(\frac{1}{2} - 1 - 0\right) + 4 + \frac{1}{2} = 5.$$

تمارين ومسائل (٣ - ٢)

احسب التكاملات الآتية :

[١] $\int_{-1}^{4} \text{س}^{3}\, \text{ء}\text{س}$.

[٢] $\int_{1}^{5} (3\text{س}^{2} - 2\text{س} + 4)\, \text{ء}\text{س}$.

[٣] $\int_{-١}^{٣} (\text{س}^٢ - \text{س} - ٦)\, \text{ء س}$.

[٤] $\int_{-٢}^{٢} (٢\text{س} + ١)\, \text{ء س}$.

[٥] $\int_{-٤}^{٤} (\text{س}^٢ - ٣)\, \text{ء س}$.

[٦] $\int_{٠}^{٤} (\text{س}^٣ - ٣)\, \text{ء س}$.

[٧] $\int_{-٢}^{-٢} (\text{س}^٣ - ٢\text{س})\, \text{ء س}$.

[٨] $\int_{١}^{٩} \sqrt{\text{ع}}\, \text{ء ع}$.

[٩] $\int_{٤}^{٩} \left(\frac{٣}{\sqrt{\text{ز}}} - ٣\sqrt{\text{ز}}\right) \text{ء ز}$.

[١٠] $\int_{١}^{٤} \left(\frac{٨}{\text{س}^٣} - \frac{١}{\text{س}^٢}\right) \text{ء س}$.

[١١] $\int_{١}^{٤} \text{س} (\sqrt{\text{س}} - ٢\text{س})\, \text{ء س}$.

[١٢] $\int_{١}^{٣} (\text{ع} - ١)(\text{ع} + ٢)\, \text{ء ع}$.

[١٣] $\int_{٠}^{٣} (\text{س}^٢ + ١)\, \text{ء س}$.

[١٤] $\int_{١}^{٤} \left(\sqrt{\text{س}} - \frac{٢}{\text{س}}\right)^٢ \text{ء س}$.

[١٥] $\int_{٠}^{١} \left(\sqrt{\text{س}} - \sqrt[٣]{\text{س}}\right)^٢ \text{ء س}$.

[١٦] $\int_{\sqrt{٢}}^{٢} (\text{س}^٣ - \text{س})\, \text{ء س}$.

[١٧] $\int_{-١}^{٤} \text{د}(\text{س})\, \text{ء س}$ بفرض أن $\text{د}(\text{س}) = \begin{cases} \text{س}^٢ + ٣ & \text{عند س} \le ٣ \\ ١٥ - \text{س} & \text{عند س} \ge ٣ \end{cases}$.

[١٨] $\int_{-٣}^{٣} |\text{س} + ١|\, \text{ء س}$.

[١٩] $\int_{-٢}^{٤} |\text{س}^٢ - ٤|\, \text{ء س}$.

٣ – ٣ تطبيقات التكامل في المساحات

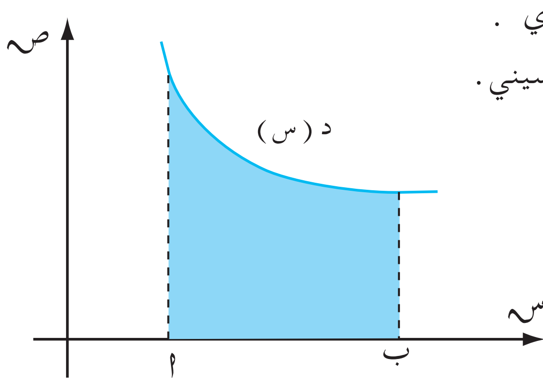
في هذا البند نتعرف على طريقة إيجاد مساحات مناطق مستوية باستخدام التكامل المحدّد ، وهذا يتطلب التعرف على موقع بيان الدالة بالنسبة للمحورين السيني والصادي .

ونقتصر دراستنا هنا على المناطــق المستوية فوق أو تحت المحور السيني .

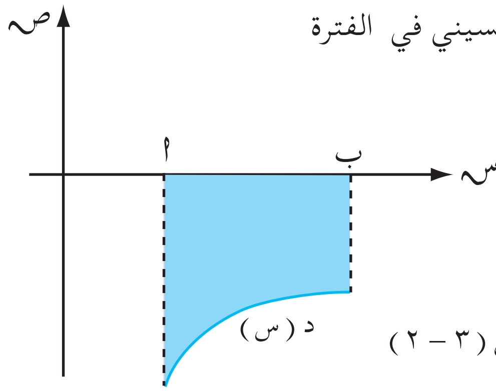
فمثلاً : إذا كانت المنطقة واقعة تحت منحنى الدالة د(س)

وفوق المحور السيني في الفترة [ا ، ب]

فإن المساحة : $\text{سط}_{ا}^{ب} = \int_{ا}^{ب} \text{د}(\text{س})\, \text{ء س}$



شكل (٣ – ١)



شكل (٣ – ٢)

وإذا كانت المنطقة واقعة فوق منحنى الدالة د(س) تحت المحور السيني في الفترة [أ ، ب] فإن مساحتها: $\text{سط}_{\text{أ}}^{\text{ب}} = -\int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \text{د(س)}\ \text{ءس}$

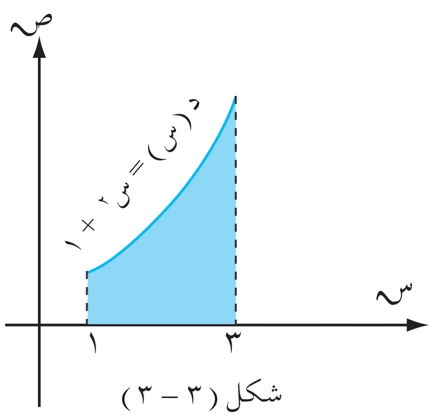
ويمكن التعبير عن المساحة المطلوبة أينما وجدت كما يلي :

$$\text{سط}_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left|\text{د(س)}\right| \text{ءس} \ .$$

مثال (٣ – ٨)

احسب مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمنحنى ص = س^{٢} + ١ والمستقيمات س = ١ ، س = ٣ ، والمحور السيني.

الحــــل :



شكل (٣ – ٣)

$$\because \ \text{سط}_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left|\text{د(س)}\right| \text{ءس} \ .$$

$$\therefore \ \text{سط}_{١}^{٣} = \int_{١}^{٣} \left|\text{س}^{٢}+١\right| \text{ءس}$$

$$= \left| \left(\frac{\text{س}^{٣}}{٣} + \text{س}\right)\Big|_{١}^{٣} \right| = \left| \frac{٢٧}{٣} + ٣ - \left(\frac{١}{٣} + ١\right) \right|$$

$$= \left| ٩ + ٣ - \frac{١}{٣} - ١ \right| = \left| ١١ - \frac{١}{٣} \right| = \frac{٣٢}{٣} \ \text{وحدة مربعة} \ .$$

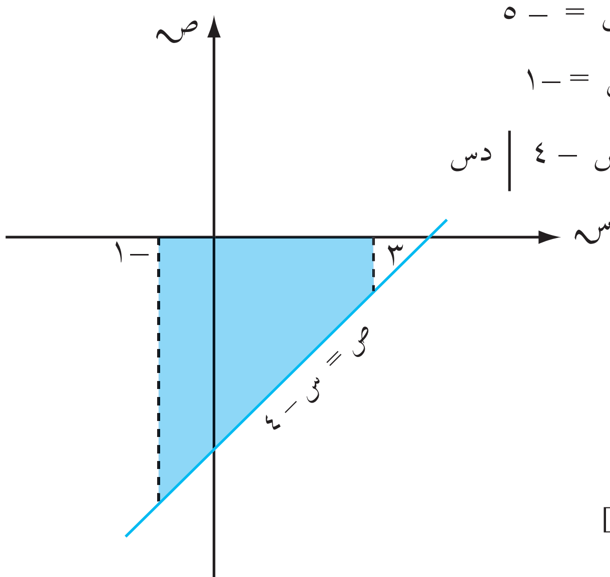
مثال (٣ – ٩)

احسب مساحة المنطقة المستوية المحددة بالمستقيمات ص = س − ٤ ، س = −١ ، س = ٣ ، ص = ٠ .

الحــــل :

عند س = −١ $\Leftarrow$ ص = −٥

عند س = ٣ $\Leftarrow$ ص = −١



شكل (٣ – ٤)

$$\because \ \text{سط}_{\text{أ}}^{\text{ب}} = \int_{\text{أ}}^{\text{ب}} \left|\text{د(س)}\right| \text{ءس} = \int_{-١}^{٣} \left|\text{س} - ٤\right| \text{دس}$$

$\because$ المنطقة واقعة تحت محور السينات .

$$\therefore \ \text{سط}_{-١}^{٣} = -\int_{-١}^{٣} (\text{س} - ٤)\ \text{ءس}$$

$$= -\left[\left(\frac{\text{س}^{٢}}{٢} - ٤\text{س}\right)\Big|_{-١}^{٣} \right]$$

$$= -\left[\frac{٩}{٢} - ١٢ - \left(\frac{١}{٢} + ٤\right) \right]$$

$$= -\left[\frac{٩}{٢} - ١٢ - \frac{٩}{٢} \right] = ١٢ \ \text{وحدة مربعة} \ .$$

مثال (٣ – ١٠)

احسب المساحة المحددة بالمنحنى $ص = س^٢ - س - ٢$ ، ومحور السينات .

الحـــل :

لإيجاد حدود التكامل نوجد نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات فنضع ص = ٠

$\Leftarrow$ $س^٢ - س - ٢ = ٠$

$\Leftarrow$ $(س - ٢)(س + ١) = ٠$

إذن إما س = ٢ أو س = –١

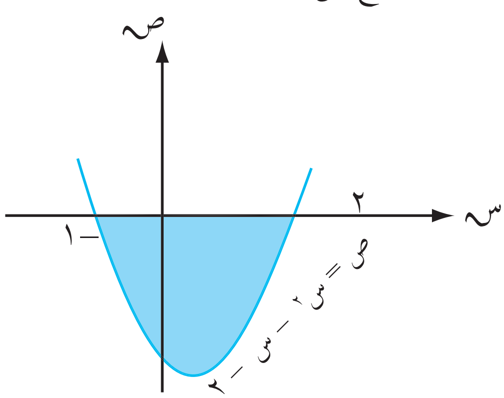
$$\therefore \; سط_{-١}^{٢} = \int_{-١}^{٢} \left| س^٢ - س - ٢ \right| ءس \; .$$

$$= -\left[\left(\frac{س^٣}{٣} - \frac{س^٢}{٢} - ٢س\right)\Big|_{-١}^{٢}\right] \text{ ، ولماذا؟}$$

$$= -\left[\frac{٨}{٣} - \frac{٤}{٢} - ٤ - \left(\frac{-١}{٣} - \frac{١}{٢} + ٢\right)\right]$$

$$= -\left(\frac{٨}{٣} - ٦ + \frac{١}{٣} + \frac{١}{٢} - ٢\right) = -\left(\frac{٩}{٣} + \frac{١}{٢} - ٨\right) = -\left(٣ + \frac{١}{٢} - ٨\right) = \left(٥ - \frac{١}{٢}\right)$$

$$= \frac{٩}{٢} \text{ وحدة مربعة .}$$



شكل (٣ – ٥)

تمارين ومسائل (٣ – ٣)

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات والمستقيمين في كل ممايأتي :

[١] $ص = ٣س^٢ - ٢س$ ، س = ١ ، س = ٣ .

[٢] ص = ٥ ، س = –٢ ، س = ٢ .

[٣] $ص = ١ - س^٣$ ، س = ١ ، س = ٢ .

[٤] $ص = ١ - س^٢$ ، س = ٢ ، س = ٣ .

[٥] $ص = س^٣ + ١$ ، س = –٢ ، س = –١ .

[٦] $ص = س^٢ + ٣$ ، س = ١ ، س = ٣ .

أوجد المساحة المحصورة بين المنحنى ومحور السينات للآتي :

[٧] $ص = س^٢ - ١$.

[٨] $ص = ٤ - س^٢$.

[٩] $ص = س^٣ + ٢س^٢$.

[١٠] $ص = س^٣ - ٩س^٣$.

تم بحمد الله

استبانة تقويم الكتاب

بيانات المستجيب:

الاسم/..................................	المؤهل وتاريخه/..................................	التخصص/..................................
العمل الحالي /..................................	المحافظة/..................................	

بيانات الكتاب:

المادة/..................................	الصف /..................................	اسم الكتاب /..................................
الجزء/..................................	الطبعة..................................	السنة الدراسية /..................................
تاريخ تعبئة الاستبانة..................................		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبعات القادمة.
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإجابتك أمام كل بند.

البنــــد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
أولاً- الأهداف:				
– وضوح الصياغة .				
– تقيس فكرة محددة .				
– يمكن قياسها .				
– شاملة (معرفية – مهارية – وجدانية) .				
ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها:				
– ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم .				
– سلامة ووضوح لغة الكتاب .				
– ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية .				
– مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة .				
– ملامسة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته .				
– مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات .				
– مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية .				
– خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات .				
– يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي .				
– مراعاة مادة الكتاب للحداثة والدقة العلمية .				
– عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير .				
– تحقيق المحتوى لأهداف المادة .				

البنــــد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
ثالثاً - الوسائل التعليمية:				
– وضوحها ودقتها .				
– ارتباطها بموضوعات الدرس .				
– مدى ارتباطها بالأهداف .				
رابعاً -التقويم:				
– الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة .				
– بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع .				
– الأسئلة والتمرينات تقيس مدى تحقيق الأهداف .				
– مناسبة لمستوى المتعلم .				
– دقة ووضوح الصياغة .				
– تراعي الفروق الفردية .				
– متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية .				
– تساعد المتعلم في تطبيق ما تعمله في مواقف الحياة المختلفة .				
– كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب .				
خامساً - الشكل والإخراج الفني:				
– ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب .				
– متانة تجليد الكتاب .				
– وضوح الألوان ومناسبتها .				
– وضوح ودقة الطباعة .				
– نوعية ورق الكتاب .				

أسئلة عامة، أجب بـ (نعم) أو (لا):

البنـــد	نعم	لا	
- ينسجم محتوى الكتاب مع نظام الفصلين الدراسيين .			
- عدد الحصص المقررة تكفي لا ستيعاب مادة الكتاب .			
- هل الوسائل التعليمية متنوعة وكافية ؟			
- هل هناك ضرورة لوجود قائمة بالمراجع ومصادر المعلومات ؟			
- هل هناك موضوعات ترى ضرورة حذفها (اذكرها) ؟			
- هل هناك موضوعات ترى ضرورة إضافتها (اذكرها) ؟			

إذا كان لديك ملاحظات أخرى اكتبها ....

....

....

....

....

قائمة الأخطاء العلمية واللغوية والمطبعية:

الخطأ	الصفحة	السطر	الصواب

نرجو التكرم بإرسال الاستبانة إلى

الإدارة العامة للمناهج

تيلفكس: ٥٤٠٣١٠ ـ ٥٤٥٧٩٩

أو إدارة المناهج

مكتب التربية بالمحافظة