الجمهورية اليمنية
وزارة التربية والتعليم
قطاع المناهج والتوجيه
الإدارة العامة للمناهج

9 ب

الرياضيات

للصف التاسع من مرحلة التعليم الأساسي

الجزء الثاني

فريق التأليف

د. شكيب محمد باجرش

د. أمة الآله علي حمد الحوري | د. محمد عبدالرب محمد بشر
د. ردمان محمد سعيد | د. علي شاهر نعمان القرشي
د. منصور علي صالح عطاء | د. محمد رشاد الكوري
أ. مريم عبدالجبار سلمان | د.عبدالله سلطان عبدالغني الصلاحي
د. محمد علي مرشد | أ. سالمين محمد باسلوم
أ.يحيى بكار مصفر | أ. ذا النون سعيد طه
أ. عبدالباري طه حيدر | أ. مصطفى عبد الواحد العبسي
أ. عبده أحمد سيف | أ. جميلة إبراهيم احمد
د. علي عبدالواحد | أ. أحمد سالم باحويرث

الإخراج الفني

الصف الطباعي والتصميم / جلال سلطان علي إبراهيم.
إداخال تعديلات / علي عبدالله السلفي.

أشرف على التصميم / حامد عبد العالم الشيباني

١٤٣٥هـ - ٢٠١٤م

النشيد الوطني

رددي أيتها الدنيا نشيدي   ردديه وأعيدي وأعيدي
واذكري في فرحتي كل شهيدِ   وامنحيه حُللاً مِنْ ضوءِ عيدي

رددي أيتها الدنيا نشيدي
رددي أيتها الدنيا نشيدي

وحدتي .. وحدتي .. يا نشيداً رائعاً يملأ نفسي   أنت عهدٌ عالقٌ في كل ذمّة
رايتي .. رايتي .. يا نسيجاً حِكْتُهُ من كل شمس   اُخْلُدِي خَافِقَةً في كل قِمَّة
أمتي .. أمتي .. اِمنحيني البأس يا مصدر بأسي   واذخُرِيني لكِ يا أكرمَ أمة

عشتُ إيماني وحبِّي أمميًا
ومسيري فوق دربي عربيا
وسيبقى نبضُ قلبي يمنيا
لن ترى الدنيا على أرضي وصيا

المصدر: قانون رقم (٣٦) لسنة ٢٠٠٦م بشأن السلام الجمهوري ونشيد الدولة الوطني للجمهورية اليمنية

قررت اللجنة العليا للمناهج طباعة هذا الكتاب .

بسم الله الرحمن الرحيم

تقـــديـــم :

في إطار تنفيذ التوجهات الرامية للاهتمام بنوعية التعليم وتحسين مخرجاته تلبية للاحتياجات ووفقاً للمتطلبات الوطنية.

فقد حرصت وزارة التربية والتعليم في إطار توجهاتها الإستراتيجية لتطوير التعليم الأساسي والثانوي على إعطاء أولوية استثنائية لتطوير المناهج الدراسية، كونها جوهر العملية التعليمية وعملية ديناميكية تتسم بالتجديد والتغيير المستمرين لاستيعاب التطورات المتسارعة التي تسود عالم اليوم في جميع المجالات.

ومن هذا المنطلق يأتي إصدار هذا الكتاب في طبعته المعدلة ضمن سلسلة الكتب الدراسية التي تم تعديلها وتنقيحها في عدد من صفوف المرحلتين الأساسية والثانوية لتحسين وتجويد الكتاب المدرسي شكلاً ومضموناً، لتحقيق الأهداف المرجوة منه، اعتماداً على العديد من المصادر أهمها: الملاحظات الميدانية، والمراجعات المكتبية لتلافي أوجه القصور، وتحديث المعلومات وبمايتناسب مع قدرات المتعلم ومستواه العمري، وتحقيق الترابط بين المواد الدراسية المقررة، فضلاً عن إعادة تصميم الكتاب فنياً وجعله عنصراً مشوقاً وجذاباً للمتعلم وخصوصاً تلاميذ الصفوف الأولى من مرحلة التعليم الأساسي.

ويعد هذا الإنجاز خطوة أولى ضمن مشروعنا التطويري المستمر للمناهج الدراسية ستتبعها خطوات أكثر شمولية في الأعوام القادمة، وقد تم تنفيذ ذلك بفضل الجهود الكبيرة التي بذلها مجموعة من ذوي الخبرة والاختصاص في وزارة التربية والتعليم والجامعات من الذين أنضجتهم التجربة وصقلهم الميدان برعاية كاملة من قيادة الوزارة والجهات المختصة فيها.

ونؤكد أن وزارة التربية والتعليم لن تتوانى عن السير بخطى حثيثة ومدروسة لتحقيق أهدافها الرامية إلى تنوير الجيل وتسليحه بالعلم وبناء شخصيته المتزنة والمتكاملة القادرة على الإسهام الفاعل في بناء الوطن اليمني الحديث والتعامل الإيجابي مع كافة التطورات العصرية المتسارعة والمتغيرات المحلية والإقليمية والدولية.

أ.د. عبدالرزاق يحيى الأشول
وزير التربية والتعليم
رئيس اللجنة العليا للمناهج

بسم الله الرحمن الرحيم

المقدمــة

الحمد لله رب العالمين،والصلاة والسلام على خاتم النبيين ، وآله وصحبه أجمعين .
لقد حرصت وزارة التربية والتعليم على تطوير المناهج التعليمية لمرحلة التعليم الأساسي وفق أسس علمية وتربوية . وبعد كتاب الصف الثامن يأتي كتاب الصف التاسع لمواكبة هذا التطوير .

وفي هذا الكتاب يجد أبناؤنا الطلبه مادة الرياضيات معروضة لهم باساليب وقوالب جديدة تساعدهم على سرعة الفهم والاستيعاب ، وتسهل لهم التعامل مع المادة وتحفزهم على حبها ، كما تنمي فيهم القدرات التفكيرية وتوسع ثقافتهم العلمية .

إن الكتاب غني بالشرح والأمثلة إلى جانب الأنشطة والتدريبات لكل درس ، والتمارين العامة لكل وحدة دراسية ، ولذا على أبنائنا الطلبة بذل أقصى جهودهم والاستفادة من توجيهات المدرسين ، والدراسة المتمعنة للمادة المقدمة وتتبعها بدقة وحل أكبر قدر من التمارين والمسائل ، وهذا من شأنه ترسيخ المعرفة الرياضية في أذهانهم وإكسابهم المهارات الكافية للأستمرار في التعلم .

وفي هذا الكتاب نقدم لأبنائنا الطلبة مادة الرياضيات بأسلوب واضح سهل يتناسب ومستويات الطلبة وقدراتهم وبدقة علمية مع مراعاة جوانبها التربوية ، ولذا تضمنت وحدات الكتاب تعاريف رياضية دقيقة ولكنها مبسطة ، واحتوت على برهنة رياضية ولكنها متدرجة . وترابطت المواضيع في بناء منطقي متسلسل يساعد أبنائنا على التقدم الراسخ في تعلم المادة كما تم تقديم المادة بلغة مبسطة شيقة ومدعومة بالأشكال والتوضيحات الكافية ترغيباً لهم في المادة ، وعلى طريق تحقيق الطموح العلمي المنشود .

والله وراء القصد وهو ولي التوفيق ،،،

المؤلفــون

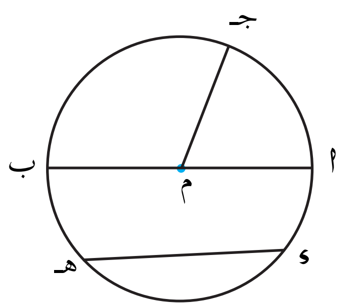
المحتويات

الموضوع		الصفحة

تابع المحتويات

الوحدة الخامسة الهندسة

٥ : ١ الدائرة



شكل (٥ – ١)

تأمل الشكل (٥ – ١) :

تعرفت سابقاً على الدائرة وعلى مسميات بعض عناصرها .

نسمي النقطة « م » مركز الدائرة ،

$\overline{\text{أ ب}}$ قطر الدائرة ، $\overline{\text{ء هـ}}$ وتر الدائرة ،

$\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ أنصاف أقطار الدائرة ،

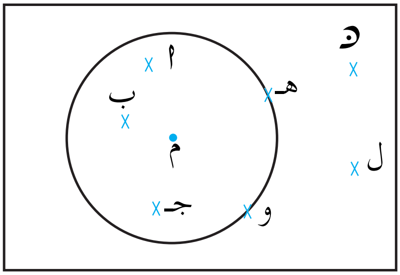
تلاحظ أن | م أ | = | م ب | = | م جـ | .

تعاريف :

الدائرة : هي مجموعة نقاط في مستوى واحد تبعد عن نقطة ثابتة مسافات متساوية ، وتسمى النقطة الثابتة مركز الدائرة ، وتسمى الدائرة باسم مركزها .

نصف قطر الدائرة : هو القطعة المستقيمة الواصلة من مركز الدائرة إلى أي نقطة تقع على الدائرة ، ونرمز لطول نصف القطر بالرمز « نق »

تأمل الشكل (٥ – ٢) .. تلاحظ أن



شكل (٥ – ٢)

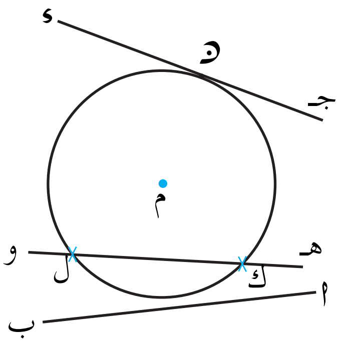
الدائرة تقسم المستوى إلى ثلاثة أجزاء هي :

الجزء الأول : داخل الدائرة ، النقاط مثل ا، ب، جـ تقع داخل الدائرة،

الجزء الثاني : على الدائرة، النقاط مثل هـ ، و تقع على الدائرة ،

الجزء الثالث : خارج الدائرة ، النقاط مثل ﮉ ، ل تقع خارج الدائرة .

الأوضاع النسبية لدائرة ومستقيم:



شكل (٥ – ٣)

تأمل الشكل (٥ – ٣) :

ماذا تلاحظ؟

نلاحظ أن :

(١) المستقيم ا ب ، والدائرة م لايتقاطعان،

$\overleftrightarrow{\text{ا ب}} \cap$ م $= \phi$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{\text{ا ب}}$ يقع خارج الدائرة .

(٢) $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ يمس الدائرة م في نقطة واحدة هي النقطة ﮉ .

$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}} \cap$ م $=$ { ﮉ }

نسمي $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماسا للدائرة ، ونسمي ﮉ نقطة التماس .

(٣) $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يقطع الدائرة في نقطتين هما ك ، ل ،

$\overleftrightarrow{\text{هـ و}} \cap$ م $=$ { ك ، ل } .

نسمي $\overline{\text{ك ل}}$ وتراً ، $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ قاطعاً للدائرة .

تذكر أن :

وتر الدائرة : هو القطعة المستقيمة الواصلة بين أي نقطتين من الدائرة .

القوس : هو جزء من الدائرة محصور بين نقطتين عليها .

في الشكل (٥ – ٤) لدينا قوسان

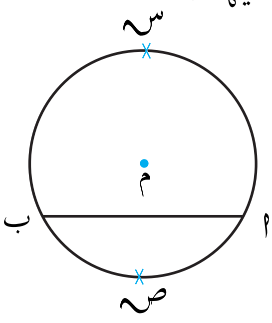
هما القوس الأكبر ونرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{ا س ب}}$.

القوس الأصغر ونرمز له بالرمز $\overset{\frown}{\text{ا ص ب}}$.

كما نلاحظ أن الوتر ا ب يقسم الدائرة

إلى قطعتين : القطعة الكبرى (ا س ب)

والقطعة الصغرى (ا ص ب) .



شكل (٥ – ٤)

تماريـن ومسائـل

[١] أوجد قطر الدائرة إذا كان نصف قطرها :

ا) ٥سم　　ب) ٢٠ سم　　جـ) $\frac{١}{٢}$ ٣سم .

[٢] أوجد نصف قطر الدائرة إذا كان قطرها :

ا) ١٣سم　　ب) ١٠,٥ سم　　جـ) ٢,٦ سم .

[٣] أوجد نصف قطر الدائرة إذا كان طول أكبر وتر فيها ١٦سم .

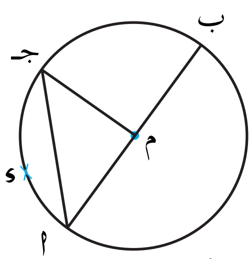
[٤] فـي الشـكل (٥ – ٥) :

دائرة مركزها م ، سمِّ ما يلي :

ا) قطراً للدائرة ، ب) وترين للدائرة ،

جـ) ثلاثة أنصاف أقطار للدائرة ،

ء) أربعة أقواس ، هـ) قطعتان .



شكل (٥ – ٥)

[٥] ارسم دائرتين مركزهما نقطة أ ، وطول نصف قطر إحداهما ٣سم وطول نصف قطر الأخرى ٤,٥سم ، ثم ارسم القطر $\overline{\text{ب جـ}}$ في الدائرة الكبرى، عين س ، ص نقطتي تقاطع $\overline{\text{ب جـ}}$ مع الدائرة الصغرى ، أوجد | ب جـ | ، | ب ص | ، | ب س | .

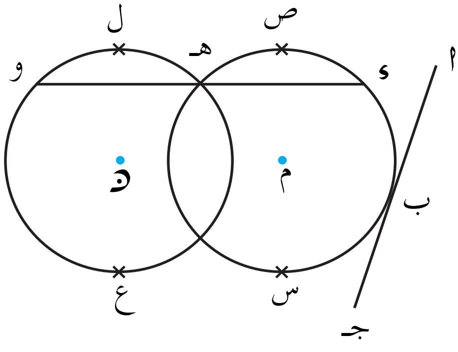
[٦] في الشكل (٥ – ٦) : دائرتان مركزاهما (م ، ﻫ)، لاحظ أن $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ خارج ﻫ ، سمِّ ما يلي :

أ) مماساً للدائرة م ،

ب) نقطة التمـــاس ،

جـ) وترين للدائرتين ،

ء) أربعة أقواس للدائرتين .



شكل (٥ – ٦)

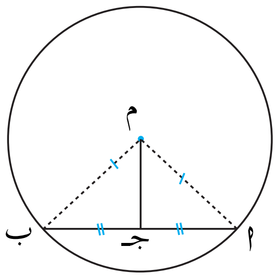
٥ : ٢ العمود النازل من مركز الدائرة على الوتر

مبرهنة (٥ – ١) :

المستقيم الواصل من مركز الدائرة إلى منتصف أي وترٍ فيها يكون عمودياً على الوتر .

المعطيات : دائـرة مركـزهـا م ، $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة ، | أ جـ | = | جـ ب | ،

[انظر شكل (٥ – ٧)] .



شكل (٥ – ٧)

المطلوب : إِثبات أن : $\overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$.

العمل : نرسم $\overline{\text{م أ}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$.

البرهان :

$\Delta\Delta$ م أ جـ ، م ب جـ ، فيهما :

$\overline{\text{م جـ}}$ (ضلع مشترك)

| م أ | = | م ب | = نق

| أ جـ | = | ب جـ | (معطى)

$\therefore \Delta$ م أ جـ $\cong \Delta$ م ب جـ

ومن التطابق ينتج أن :

ق (∢ م جـ أ) = ق (∢ م جـ ب)

لكن ق (∢ م جـ أ) + ق (∢ م جـ ب) = 180°

$\therefore$ ق (∢ م جـ أ) = ق (∢ م جـ ب) = 90°

$\therefore \overline{\text{م جـ}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ وهو المطلوب

عكس المبرهنة (٥ – ١) :

العمود النازل من مركز الدائرة على أي وتر فيها ينصفه

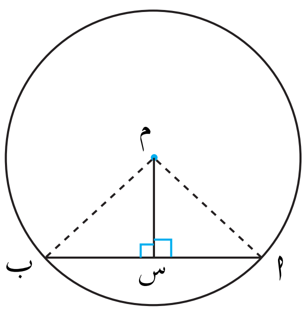
المعطيات : $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة م ،

$\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$

[انظر شكل (٥ – ٨)]

المطلوب : إِثبات أن :

| أ س | = | س ب | .



شكل (٥ – ٨)

العمل : نرسم $\overline{\text{م ؟}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$

البرهان :

$\Delta\Delta$ م س ؟ ، م س ب ، فيهما :

$|\text{م ؟}| = |\text{م ب}| =$ نق

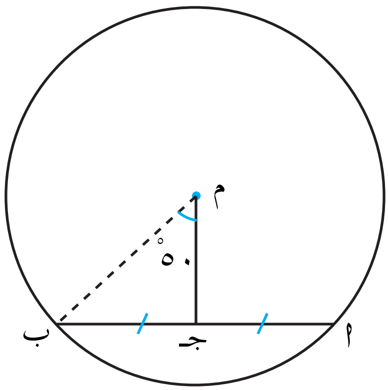
$\overline{\text{م س}}$ (ضلع مشترك)

ق ($\measuredangle$ م س ؟) = ق ($\measuredangle$ م س ب) = 90° (معطى)

$\therefore \Delta$ م س ؟ $\cong \Delta$ م س ب

$\therefore |\text{؟ س}| = |\text{ب س}|$ وهو المطلوب .

تدريبات



شكل (٥ – ٩)

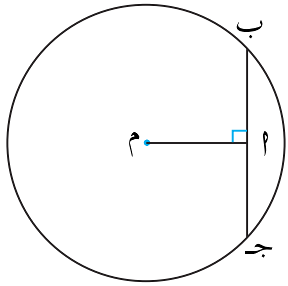
[١] في الشكل (٥ – ٩) :

$\overline{\text{؟ ب}}$ وتر في الدائرة م ،

جـ منتصف $\overline{\text{؟ ب}}$ ،

ق ($\measuredangle$ جـ م ب) = 50°

أوجد ق ($\measuredangle$ م ب جـ) .



شكل (٥ – ١٠)

[٢] في الشكل (٥ – ١٠) :

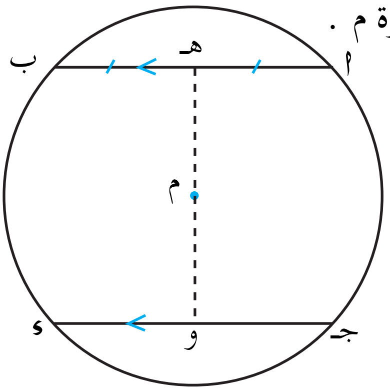
$\overline{\text{ب جـ}}$ وتر في الدائرة م ،

$\overline{\text{م ؟}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ ، $|\text{ب ؟}| = ٣$سم

أوجد $|\text{ب جـ}|$.

مثال (١)

في الشكل (٥ – ١١) : $\overline{\text{ا ب}}$، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران متوازيان في الدائرة م ، هـ منتصف $\overline{\text{ا ب}}$، $\overline{\text{هـ م}}$ يقطع $\overline{\text{جـ ء}}$ في و ، اثبت أن و منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$.



شكل (٥ – ١١)

المعطيات : $\overline{\text{ا ب}}$، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران متوازيان في الدائرة م .

| ا هـ | = | هـ ب |

المطلوب : إِثبات أن : | جـ و | = | و ء | .

البرهان :

| ا هـ | = | هـ ب | (معطى)

∴ $\overline{\text{م هـ}}$ ⊥ $\overline{\text{ا ب}}$ (مبرهنة)

، ∵ $\overline{\text{ا ب}}$ // $\overline{\text{جـ ء}}$ (معطى)

∴ ق (∡ و هـ ا) + ق (∡ هـ و جـ) = ١٨٠° (حقيقة)

∴ ق (∡ هـ و جـ) = ٩٠°

∴ $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$

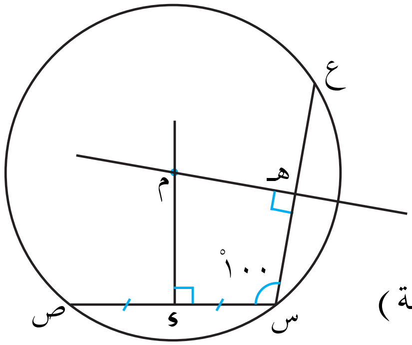
∴ | جـ و | = | و ء |

وهـو المـطـلـوب .

مثال (٢)

$\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ وتران في الدائرة م ، ق (∡ ع س ص) = ١٠٠° ، ء ، هـ منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{س ع}}$ على الترتيب . أوجد ق (∡ ء م هـ) .

الحــل :



شكل (٥ – ١٢)

[انظر الشكل (٥ – ١٢)] :

∵ ء منتصف $\overline{\text{س ص}}$ (معطى)،

∴ ق (∠ م ء س) = ٩٠° (مبرهنة)

وبالمثل ق (∠ م هـ س) = ٩٠° (مبرهنة)

ق (∠ هـ م ء) + ق (∠ م ء س) + ق (∠ ء س هـ) + ق (∠ س هـ م) = ٣٦٠°

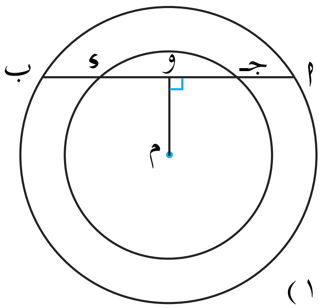
(مجموع زوايا الشكل الرباعي هـ م ء س)

∴ ق (∠ ء م هـ) = ٣٦٠° – (٩٠° + ١٠٠° + ٩٠°)

= ٣٦٠° – ٢٨٠° = ٨٠°

∴ ق (∠ ء م هـ) = ٨٠° .

مثال (٣) في الشكل (٥ – ١٣) : $\overline{\text{أ ب}}$ وتر



شكل (٥ – ١٣)

في الدائرة الكبرى (م) ، يقطع الدائرة

الصغرى (م) ، في النقطتين جـ ، ء ،

أثبت أن | أ جـ | = | ب ء | .

المعطيات : $\overline{\text{أ ب}}$ يقطع الدائرة الصغرى في النقطتين جـ ، ء ،

المطلوب : إثبات أن : | أ جـ | = | ب ء | .

العمــل : نرسم $\overline{\text{م و}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$

البرهان :

في الدائرة الكبرى (م) :

$\because$ $\overline{م و} \perp \overline{أ ب}$ (عملا)

$\therefore$ $|أ و| = |و ب|$ ..... (١) (عكس المبرهنة)

في الدائرة الصغرى (م) :

$\because$ $\overline{م و} \perp \overline{جـ ء}$

$\therefore$ $|و جـ| = |و ء|$ ..... (٢) (عكس المبرهنة)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن :

$|أ جـ| = |ء ب|$ وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] $\overline{أ ب}$ وتر في دائرة مركزها م ، $\overline{م جـ} \perp \overline{أ ب}$ ، $|م جـ|$ = ٦سم ، نق = ١٠سم ، احسب $|أ ب|$.

[٢] $\overline{أ ب}$ وتر في دائرة مركزها م ، س منتصف $\overline{أ ب}$ ، فإذا عُلم أن $|أ س|$ = ٣سم ، $|س م|$ = ٤ سم ، احسب طول نصف القطر .

[٣] $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران في الدائرة م ، ق ($\measuredangle$ ب أ جـ) = ٧٥° ، ء ، هـ منتصف $\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ على الترتيب ، أوجد ق ($\measuredangle$ ء م هـ) .

[٤] في الشكل (٥ – ١٤) :

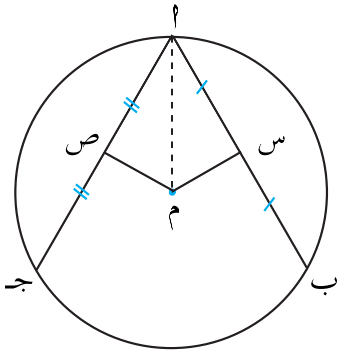
$\overline{أ ب}$ ، $\overline{أ جـ}$ وتران في الدائرة م ،

س منتصف $\overline{أ ب}$ ، ص منتصف $\overline{أ جـ}$ ،

فإذا كان ق ($\measuredangle$ ب أ جـ) = ٦٠°

احسب ق ($\measuredangle$ س م أ) ،

ق ($\measuredangle$ س م ص) المنعكسة .



شكل (٥ – ١٤)

[٥] $\overline{اب}$ ، $\overline{جـ ء}$ وتران متوازيان في الدائرة م ، هـ منتصف $\overline{اب}$،رسم $\overline{هـ م}$ فقطع $\overline{جـ ء}$ في و ، أثبت أن : | و جـ | = | و ء | .

[٦] م ، ن دائرتان متقاطعتان في ا ، ب ، نصف خط المركزين م ن في جـ ثم وصِّل $\overline{جـ ا}$ ، رسم المستقيم ا ء عموداً على $\overline{ا جـ}$ ، يقطع محيط الدائرة م في ء ، ومحيط الدائرة ن في هـ . أثبت أن | ء ا| = | ا هـ|.

[٧] $\overline{اب}$ وتر في دائرة مركزها م فيه ق (∡ م ا ب) = ٤٨° ، نصفت زاوية م ا ب بالمستقيم ا ء فلاقى محيط الدائرة في نقطة ء ثم نصف الوتر $\overline{اب}$ في جـ ، وصل $\overline{م جـ}$.

أولاً : أوجد قياس الزاوية م ء ا بالدرجات

ثانياً : أثبت أن $\overline{م ء}$ // $\overline{ا ب}$

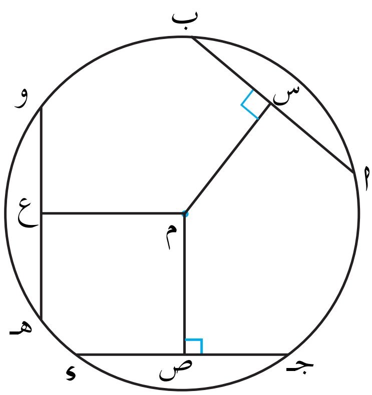
ثالثاً : اثبت أن ق (∡ ء م جـ) = ٩٠° .

٥ : ٣ أوتــار الدائــرة

تأمل الشكل (٥–١٥) : ماذا تلاحظ؟

تلاحظ أن :

$\overline{اب}$، $\overline{جـ ء}$ ،$\overline{هـ و}$ ثلاثة أوتار متطابقة في الدائرة م ، $\overline{اب}$ يبعد عن مـركز الدائـرة مسافة قدرها |م س| ، $\overline{جـ ء}$ يبعـد عن مركز الدائرة مسافة قدرها |م ص| ، $\overline{هـ و}$ يبعد عن مركز الدائرة مسافة قدرها |م ع|،



شكل (٥ – ١٥)

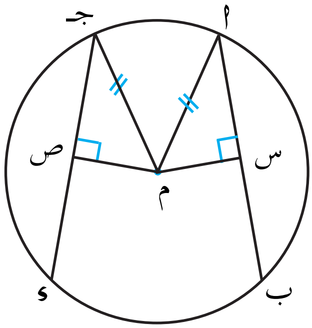
هل هناك علاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة ؟

أوجد أطوال الأوتار الثلاثة وأبعادها عن مركز الدائرة ، ثم قارن ؟ ماذا تستنتج ؟ تلاحظ أن :

هناك علاقة بين طول الوتر وبعده عن مركز الدائرة ، وعليه يمكن استنتاج المبرهنة التالية :

مبرهنة (٥ – ٢) :

الأوتار المتطابقة في الدائرة على أبعاد متساوية عن مركزها .



شكل (٥ – ١٦)

المعطيات : ا ب ، جـ ء وتران في الدائرة م ،

| ا ب | = | جـ ء | ، م ص ⊥ جـ ء ،

م س ⊥ ا ب [انظر شكل (٥–١٦)] .

المطلوب : إثبات أن : | م س | = | م ص | .

العمل : نرسم م ا ، م جـ .

البرهان :

∵ م س ⊥ ا ب ∴ | ا س | = $\frac{1}{2}$ | ا ب | (مبرهنة)

∵ م ص ⊥ جـ ء ∴ | جـ ص | = $\frac{1}{2}$ | جـ ء | . (مبرهنة)

∵ | ا ب | = | جـ ء | ∴ | ا س | = | جـ ص | .

∴ ∆∆ ا س م ، جـ ص م فيهما :

| م ا | = | م جـ | = نق

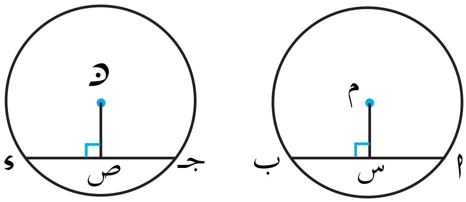
| ا س | = | جـ ص | (برهاناً)

ق (∡ ا س م) = ق (∡ جـ ص م) (معطى)

∴ ∆ ا س م ≅ ∆ جـ ص م ،

منه ينتج أن : | م س | = | م ص | وهو المطلوب .

نتيجة :



شكل (٥ – ١٧)

في الشكل (٥ – ١٧) :

الدائرتان م ، د متطابقتان

(أي أن | م أ | = | د جـ |) ،

| أ ب | = | جـ ء |، $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{د ص}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$،

∴ | م س | = | د ص | .

عكس المبرهنة (٥ – ٢) :

الأوتار التي على أبعاد متساوية عن مركز الدائرة تكون متطابقة

مثال (١)

دائرتان متحدتان في المركز م ، رسم $\overline{\text{أ ب}}$ وترا في الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى في جـ ، ء ، ورسم $\overline{\text{س ص}}$ وتراً في الدائرة الكبرى فقطع الدائرة الصغرى في ع ، ل إذا كان | أ ب | = | س ص | ، فأثبت أن : | جـ ء | = | ع ل |.

المعطيات : $\overline{\text{أ ب}}$ يقطع الدائرة الصغرى في جـ ، ء ،

$\overline{\text{س ص}}$ يقطع الدائرة الصغرى في ع ، ل، | أ ب | = | س ص | .

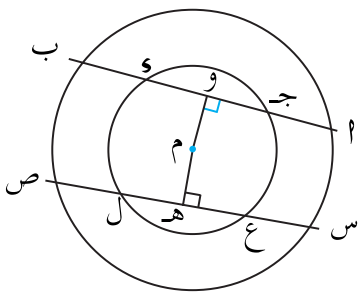
المطلوب : إثبات أن : | جـ ء | = | ع ل |.

العمل : نرسم $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{أ ب}}$ ،

$\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{س ص}}$

[انظر الشكل (٥ – ١٨)] ،

البرهان : في الدائرة الكبرى :



شكل (٥ – ١٨)

∵ $|$ ا ب $|$ = $|$ س ص $|$ (معطى)

، ∵ $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{س ص}}$ (عملاً)

∴ $|$ م و $|$ = $|$ م هـ $|$ (مبرهنة)

في الدائرة الصغرى

∵ $|$ م و $|$ = $|$ م هـ $|$ (برهاناً)

، ∵ $\overline{\text{م و}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{م هـ}} \perp \overline{\text{ع ل}}$ (عملاً)

∴ $|$ جـ ء $|$ = $|$ ع ل $|$ (عكس المبرهنة) وهو المطلوب .

مثال (٢)

في الشكل (٥ – ١٩) : $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتران متساويان في الطول في الدائرة م ، والنقطتان س ، ص منتصفا $\overline{\text{ا ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ على الترتيب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ فقطع الدائرة في هـ ، و ، برهن أن $|$ س هـ $|$ = $|$ ص و $|$.

المعطيات : $|$ ا ب $|$ = $|$ جـ ء $|$ ، س منتصف $|$ ا ب $|$، ص منتصف $|$ جـ ء $|$.

المطلوب : إثبات أن : $|$ س هـ $|$ = $|$ ص و $|$.

العمل : نسقط $\overline{\text{م ل}} \perp \overleftrightarrow{\text{س ص}}$، ونرسم $\overline{\text{م س}}$، $\overline{\text{م ص}}$.

البرهان :

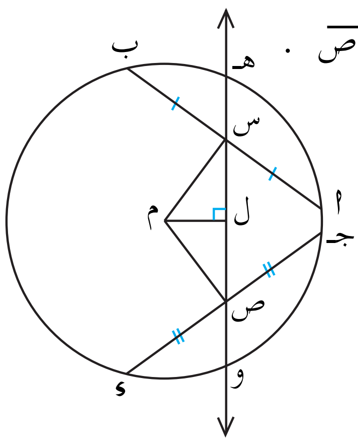
∵ $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{هـ و}}$

∴ $|$ ل هـ $|$ = $|$ ل و $|$.... (١) ،

∵ س منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ (معطى)

∴ $\overline{\text{م س}} \perp \overline{\text{ا ب}}$ ،

∵ ص منتصف $\overline{\text{جـ ء}}$ (معطى).



شكل (٥ – ١٩)

∴ $\overline{\text{م ص}} \perp \overline{\text{جـ ء}}$ ،

∵ |أ ب| = |جـ ء|

∴ |م س| = |م ص|

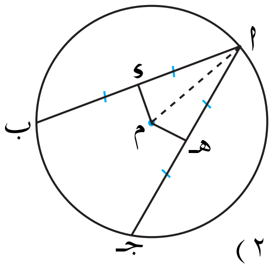
∴ Δ م س ص فيه |م س| = |م ص| ، $\overline{\text{م ل}} \perp \overline{\text{س ص}}$ ،

∴ |ل س| = |ل ص| .... (٢)

بطرح (٢) من (١) ينتج أن :

|س هـ| = |ص و| وهو المطلوب .

تمارين ومسائل



شكل (٥ – ٢٠)

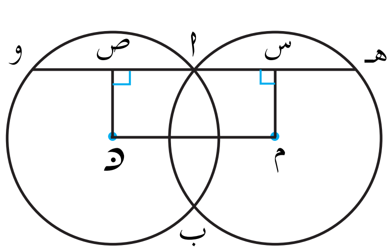
[١] في الشكل (٥ – ٢٠) : $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متطابقان في دائرة م ، أثبت أن $\overrightarrow{\text{م أ}}$ ينصف ∡ ب أ جـ .

[٢] إذا كان $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وترين في الدائرة م ، النقطتين س ، ص منتصفي $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ على الترتيب، وكان |م س| = |م ص| ، |أ ب| = ٦ سم ، فإن |جـ ص| = ... سم .

[٣] في الشكل (٥ – ٢١) :

الدائرتان م ، ن تتقاطعان في أ ، ب رسم $\overleftrightarrow{\text{هـ و}}$ يمر بالنقطة أ ، ويقطع الدائرتين في هـ ، و على الترتيب ، أنزل العمودان $\overline{\text{م س}}$ ، $\overline{\text{ن ص}}$ على $\overline{\text{هـ و}}$ ،

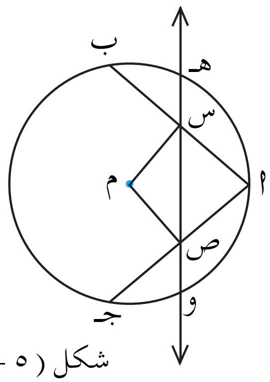
برهن أن : |س ص| = $\frac{١}{٢}$ |هـ و| .



شكل (٥ – ٢١)

[٤] في الشكل (٥– ٢٢) :

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متطابقان في الدائرة م ، س ، ص منتصفا $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ على الترتيب ، رسم $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ فقطع الدائرة في هـ ، و ، أثبت أن | س هـ | = | ص و | .

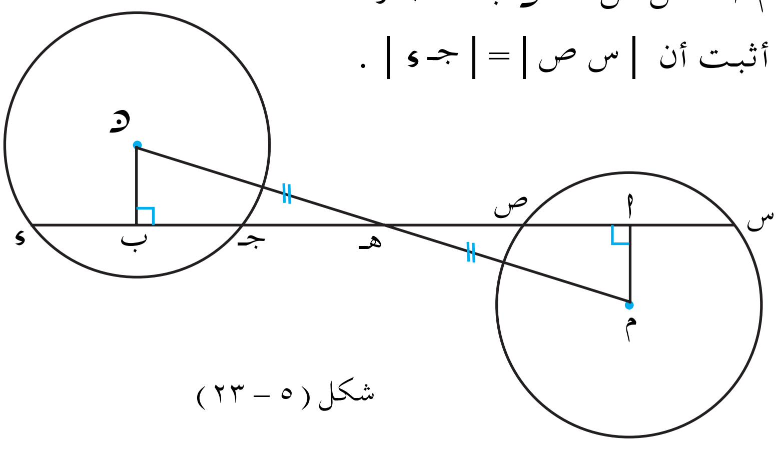


شكل (٥ – ٢٢)

[٥] أ ب جـ مثلث مرسوم داخل دائرة م ؛ فيه | أ ب | = | أ جـ | ، رسم $\overline{\text{م س}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ يقطعه في س ، ورسم $\overline{\text{م ص}}$ ⊥ $\overline{\text{أ جـ}}$ يقطعه في ص فإذا كان | م س | = ٥ سم ، | ص جـ | = ١٢ سم ، أوجد طول نصف قطر الدائرة م .

[٦] في الشكل (٥ – ٢٣) : م ، ڊ مركزا دائرتين متطابقتين وغير متقاطعتين نصف $\overline{\text{م ڊ}}$ في هـ ورسم المستقيم س ص جـ ء يمر بالنقطة هـ ويقطع الدائرة م في س ، ص وقطع الدائرة ڊ في جـ ، ء ، حيث $\overline{\text{م أ}}$ ⊥ $\overline{\text{س ص}}$ ، $\overline{\text{ڊ ب}}$ ⊥ $\overline{\text{جـ ء}}$.

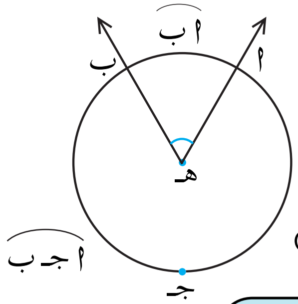
أثبت أن | س ص | = | جـ ء | .



شكل (٥ – ٢٣)

٥ : ٤ الزاوية المركزية والأقواس

في الشكل (٥– ٢٤) : الشعاعان هـ أ ،
هـ ب الخارجان من مركز الدائرة هـ ،
يشكلان زاوية تُسمى زاوية مركزية ،
وعليه فإن :

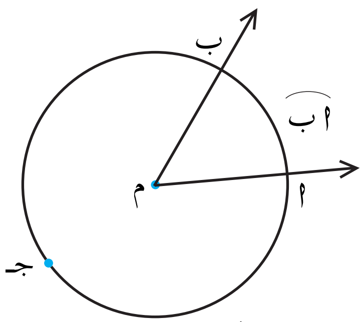


شكل (٥ – ٢٤)

الزاوية المركزية : هي زاوية رأسها مركز الدائرة .

إذا تأملنا في الشكل أعلاه نلاحظ أن الزاوية المركزية أ هـ ب تقسم الدائرة إلى قوسين القوس أ ب ويسمى القوس الصغير أو القوس المقطوع ويرمز له بالرمز أ ب . القوس أ جـ ب ويسمى بالقوس الكبير ويقرأ بثلاثة أحرف تمييزاً له عن القوس الصغير ، ويرمز له بالرمز أ جـ ب .

في الشكل (٥ – ٢٥) : نلاحظ أن النقطتين أ ، ب قد قسمت الدائرة إلى قوسين صغيراً وكبيراً ،وعند رسم الشعاعين م أ ، م ب نحصل على زاويتين مركزيتين هما ∢ أ م ب وقوسها أ ب ، ∢ أ م ب المنعكسة وقوسها أ جـ ب .



شكل (٥ – ٢٥)

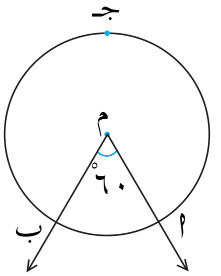
درجة قياس القوس :

درجة قياس القوس الصغير تساوي قياس زاويته المركزية المقابلة له

في الشكل (٥ – ٢٦) : إذا كانت

أ م ب زاوية مركزية قياسها = ٦٠°

فإننا نقول أن درجة قياس قوسها ٦٠° ،



شكل (٥ – ٢٦)

∴ درجة قياس القوس الكبير = ٣٦٠° – درجة قياس القوس الصغير

فمثلاً درجة قياس أ جـ ب في الشكل (٥ – ٢٦) = ٣٦٠° – ٦٠° = ٣٠٠°

تدريب (١) ما درجة قياس نصف الدائرة ؟

مبرهنة (٥ – ٣) :

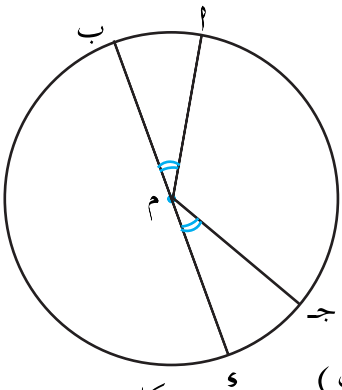
إذا تطابقت زاويتان مركزيتان تساوى قياسا قوسيهما الصغيرين .

المعطيات : ∡ أ م ب ≅ ∡ جـ م ء

[انظر الشكل (٥ – ٢٧)] .

المطلوب : إثبات أن :

قياس أ ب = قياس جـ ء



شكل (٥ – ٢٧)

البرهان :

قياس أ ب = ق (∡ أ م ب) (تعريف)

قياس جـ ء = ق (∡ جـ م ء) (تعريف)

ولكن ∡ أ م ب ≅ ∡ جـ م ء (معطى)

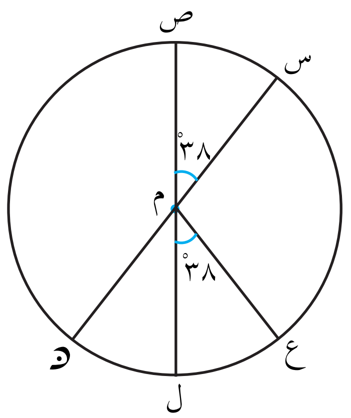
∴ قياس أ ب = قياس جـ ء وهو المطلوب

عكس مبرهنة (٥ – ٣) :

إذا تساوى قياسا قوسين في دائرة تطابقت زاويتاهما المركزيتان .

تدريب (٢) برهن عكس المبرهنة (٥ –٣) .

مثال (١)



شكل (٥ –٢٨)

في الشكل (٥ – ٢٨) : م مركز الدائرة،

أوجد ما يلي :

أ) قياس ⌒ل ﻫ   ب) قياس ⌒ل ن ص

جـ) قياس ⌒س ع   ء) قياس ⌒س ﻫ ع

الحـــل :

أ) قياس ⌒ل ﻫ = ٣٨° لأن ق (∡ س م ص)= ق (∡ ل م ﻫ) (بالتقابل بالرأس)

ب) قياس ⌒ل ﻫ ص = ١٨٠° (نصف دائرة)

جـ) قياس ⌒س ع = ١٨٠° – ٧٦° = ١٠٤°

ء) قياس ⌒س ﻫ ع = ١٨٠° + ٧٦° = ٢٥٦°

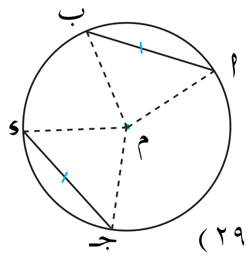
مبرهنة (٥– ٤) :

إذا تطابقت الأوتار في دائرة تساوت قياسات أقواسها المتناظرة

المعطيات :

م دائرة فيها : $\overline{أ ب} \cong \overline{جـ ء}$

[انظر الشكل (٥– ٢٩)]



شكل (٥ – ٢٩)

المطلوب : إِثبات أن :

قياس $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$ = قياس $\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$

العمـل : نرسم $\overline{\text{م ا}}$ ، $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م جـ}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$

البرهان :

∵ |م ب| = |م جـ| ، |م ا| = |م ء| ، |ا ب| = |جـ ء| (لماذا؟)

∴ Δ ا م ب $\cong$ Δ جـ م ء (لماذا ؟)

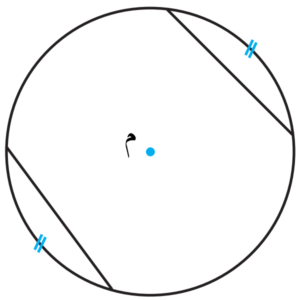
∴ ق (∡ ا م ب) = ق (∡ جـ م ء)

∴ قياس $\overset{\frown}{\text{ا ب}}$ = قياس $\overset{\frown}{\text{جـ ء}}$ وهو المطلوب .

عكس المبرهنة (٥ – ٤) :

إِذا تساوت قياسات الأقواس في دائرة تطابقت أوتارها المتناظرة

[انظر الشكل (٥ – ٣٠)] .

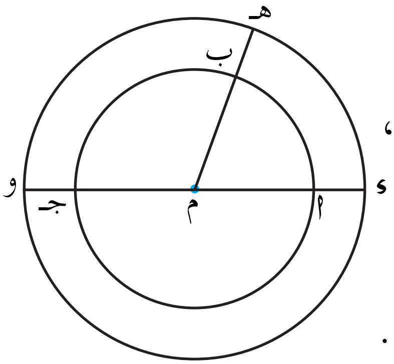


شكل (٥ – ٣٠)

تدريـــب (٣)

برهن عكس المبرهنة

تمارين ومسائل



شكل (٥ – ٣١)

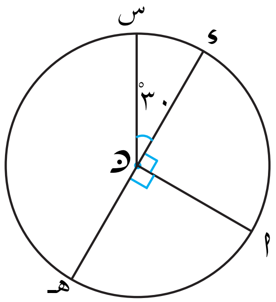
[١] في الشكل (٥ – ٣١) دائرتان متحدتا المركز ، ءو قطر الدائرة الكبرى،
∡ ء م هـ حادة .

أ) سمِّ القوس الصغير للدائرة الكبرى .

ب) سمِّ قوسين كبيرين للدائرة الصغرى .

جـ) أيهما أكبر في القياس ء هـ أم ب جـ ؟

[٢] في الشكل (٥ – ٣٢) : د دائرة ، فيها أد ⊥ ء هـ ، وقياس ء س = ٣٠° ، أوجد :



شكل (٥ – ٣٢)

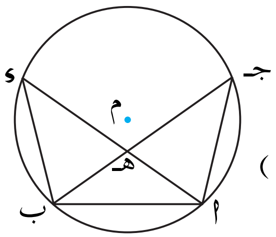
أ) قياس ء أ

ب) قياس س أ .

جـ) قياس س هـ أ

ء) قياس س هـ ء .

[٣] في الشكل (٥ – ٣٣) :

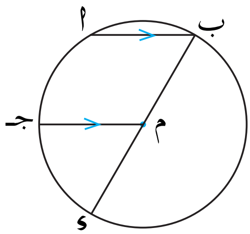


شكل (٥ – ٣٣)

م مركز الدائرة ، |ب ء| = |أ جـ|

برهن أن : |أ ء| = |ب جـ| .

[٤] في الشكل (٥ – ٣٤) :



شكل (٥ – ٣٤)

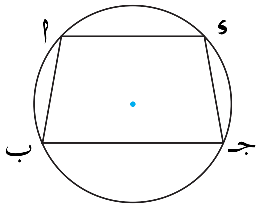
ء ب قطر الدائرة م ، أ ب // م جـ

أثبت أن : جـ منتصف أ ء .

[٥] فـــي الشـــكل (٥ – ٣٥) :

ب أ ء ≅ جـ ء أ .

أثبت أن : أ ب ≅ جـ ء .

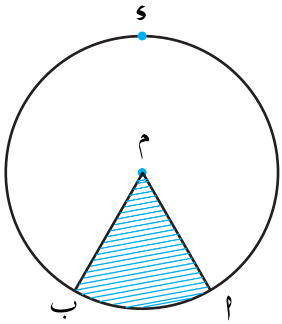


شكل (٥ – ٣٥)

٥ : ٥ القطـاع الدائــري

فـــي الشـــكل (٥ – ٣٦) :

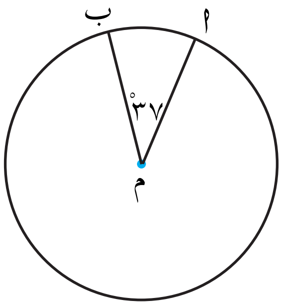
المنطقة المظللة المحددة بالقـــوس أ ب ، ونصفي القطرين م أ ، م ب تسمى بالقطـاع الدائـــري الصغيـــر . المنطقـة غيـر المظللـة المحددة بالقوس أ ء ب ونصفي القطرين م أ، م ب تسمى بالقطاع الدائري الكبير .



شكل (٥ – ٣٦)

طول القوس ، ومساحة القطاع :

تأمــل القطـــاع الدائـــري م أ ب في الشكل (٥ – ٣٧) تلاحظ أن :



شكل (٥ – ٣٧)

طول القوس أ ب = $\frac{٣٧}{٣٦٠}$ من محيط الدائرة

أي أن طول القوس أ ب = $\frac{٣٧}{٣٦٠}$ × محيط الدائرة

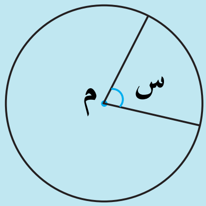
∴ $\frac{\text{طول أ ب}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{٣٧}{٣٦٠}$

مساحة القطاع الدائري م أ ب = $\frac{٣٧}{٣٦٠}$ × مساحة الدائرة .

∴ $\frac{\text{مساحة القطاع}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{٣٧}{٣٦٠}$

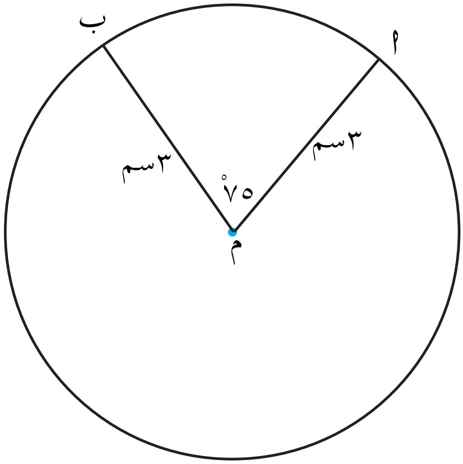
$$\frac{\text{طول القوس}}{٢\ \pi\ \text{نق}} = \frac{\text{س}}{٣٦٠}$$

$$\frac{\text{مساحة القطاع}}{\pi\ \text{نق}^{٢}} = \frac{\text{س}}{٣٦٠}$$



شكل (٥ - ٣٨)

مثال (١)



شكل (٥ – ٣٩)

مستعيناً بالشكل(٥–٣٩)أوجد :

أ) محيط القطاع الدائري الصغير .

ب) مساحة القطاع الدائري الصغير .

الحــل :

أ) نفرض أن طول $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$ = س سم

$$\therefore \frac{\text{س}}{٢ \times \pi \times ٣} = \frac{٧٥}{٣٦٠}$$

$$\therefore \text{س} = ٢ \times ٣ \times \pi \times \frac{٧٥}{٣٦٠} = \frac{٥}{٤}\pi = \frac{٥}{\cancel{٤}_{\,٢}} \times \frac{\cancel{٢٢}^{\,١١}}{٧} = \frac{٥٥}{١٤} = ٣\frac{١٣}{١٤}\ \text{سم}$$

∵ محيط القطاع = طول القوس + طول القطر .

$$\therefore \text{محيط القطاع الصغير} = ٣\frac{١٣}{١٤} + ٣ + ٣ = ٩\frac{١٣}{١٤}\ \text{سم} .$$

ب) نفرض أن مساحة القطاع الصغير = ص سم^{٢} .

$$\therefore \frac{\text{ص}}{\pi \times ٣^{٢}} = \frac{٧٥}{٣٦٠}$$

$$\therefore \text{ص} = \pi \times ٣^{٢} \times \frac{٧٥}{٣٦٠} = \frac{١٥}{٨}\pi\ \text{سم}^{٢} .$$

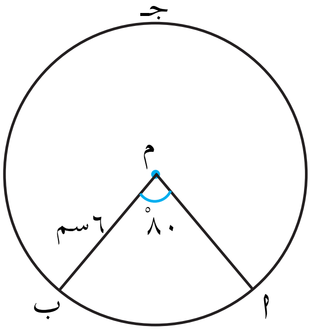
$$= \frac{١٥}{٨} \times \frac{٢٢}{٧} = \frac{١٦٥}{٢٨} = ٥\frac{٢٥}{٢٨}\ \text{سم}^{٢} .$$

مثال (٢)

مستعيناً بالشكل (٥ – ٤٠) أوجد :

أ) طول القوس الكبير أ جـ ب .

ب) مساحة القطاع الدائري الكبير .



شكل (٥ – ٤٠)

الحل :

أ) نفرض أن طول القوس الكبير = س سم

$$\therefore \frac{\text{س}}{\text{٢}\,\pi \times \text{٦}} = \frac{\text{٣٦٠} - \text{٨٠}}{\text{٣٦٠}}$$

$$\therefore \text{س} = \text{٢}\,\pi \times \text{٦} \times \frac{\text{٢٨٠}}{\text{٣٦٠}} = \text{٢} \times \frac{\text{٢٢}}{\text{٧}} \times \text{٦} \times \frac{\text{٢٨٠}}{\text{٣٦٠}} = \frac{\text{٨٨}}{\text{٣}} \text{ سم}$$

ب) نفرض أن مساحة القطاع الدائري الكبير = م سم^2

$$\therefore \frac{\text{م}}{\pi \times \text{٦}^2} = \frac{\text{٣٦٠} - \text{٨٠}}{\text{٣٦٠}}$$

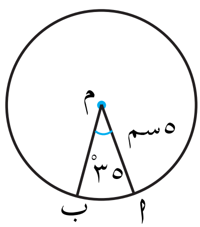
$$\therefore \text{م} = \pi \times \text{٦}^2 \times \frac{\text{٢٨٠}}{\text{٣٦٠}} = \frac{\text{٢٢}}{\cancel{\text{٧}}_{\text{١}}} \times \overset{\text{١}}{\cancel{\text{٣٦}}} \times \frac{\overset{\text{٤}}{\cancel{\text{٢٨٠}}}}{\cancel{\text{٣٦٠}}_{\text{١}}} = \text{٨٨}\text{سم}^2 \ .$$

تمارين ومسائل

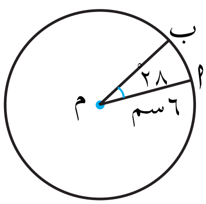
[١] أوجد كلاً من : أ) محيط القطاع الدائري الصغير .

ب) مساحة القطاع الدائري الصغير .

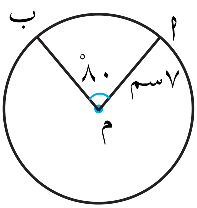
في كل من الأشكال (٥ – ٤١ أ، ب ، جـ ، ء) ، (ط = ٣,١٤)



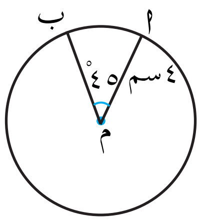
شكل (٥ – ٤١أ)



شكل (٥ – ٤١ب)

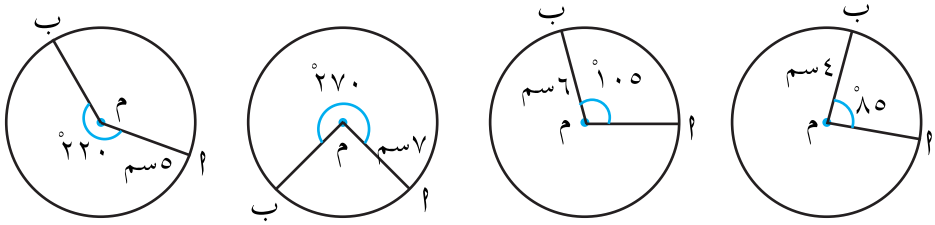


شكل (٥ – ٤١جـ)



شكل (٥ – ٤١ء)

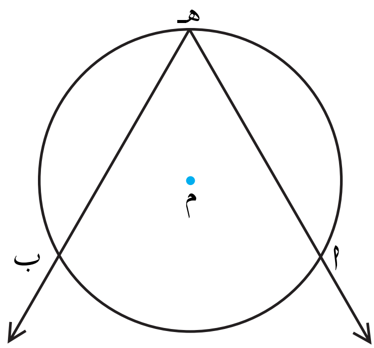
[٢] أوجـــد محيـــط ومساحـــة القطـــاع الدائـــري الكبيـــر فـــي كل مـــن الأشكال (٥ – ٤٢ أ ، ب ، جـ ، ء) ، (ط = $\frac{٢٢}{٧}$) .



شكل (٥ – ٤٢أ)   شكل (٥ – ٤٢ب)   شكل (٥ – ٤٢جـ)   شكل (٥ – ٤٢ء)

٥ : ٦ الزاويـــة المحيطيـــة

تأمل الشكل (٥ –٤٣) ، هـ نقطة على محيـط الدائرة (م)، $\overleftarrow{\text{هـ أ}}$ ، $\overleftarrow{\text{هـ ب}}$ شعاعان يقطعان محيط الدائرة في أ ، ب ، وبذلك تكونت لدينا زاوية هي ∢ أ هـ ب ، مثل هذه الزاوية تسمى زاوية محيطية .



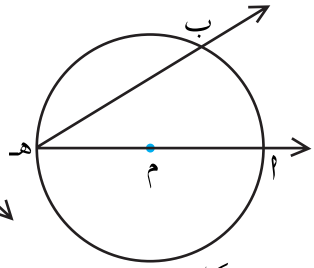
شكل (٥ – ٤٣)

تعريف :

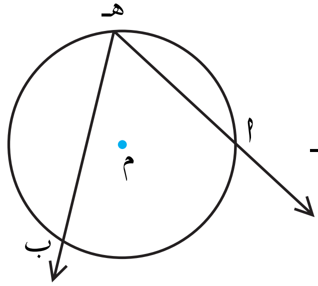
الزاوية المحيطية : هي زاوية يقطع ضلعاها قوساً من الدائرة ، ورأسها نقطة على محيط الدائرة .

من الشكل يلاحظ أن الزاوية المحيطية تقسم الدائرة إلى قوسين أحدهما القوس المقابل للزاوية ويسمى قوس الزاوية المحيطية ، والآخر القوس المعكوس للزاوية ويسمى القوس المنعكس للزاوية المحيطية .

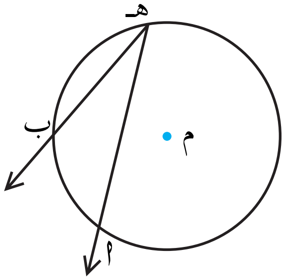
الأشكال(٥–٤٤ أ ،ب ،جـ) تبين حالات مركز الدائرة بالنسبة للزاوية المحيطية .



شكل (٥ – ٤٤أ)



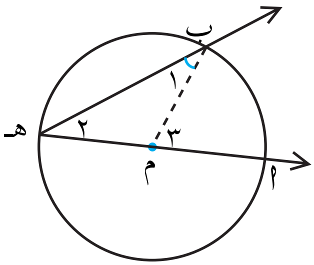
شكل (٥ – ٤٤ب)



شكل (٥ – ٤٤جـ)

نشـــاط (١)

ادرس الشكل (٥ – ٤٥) ثم أجب عن الأسئلة التالية :



شكل (٥ – ٤٥)

أ – هل م هـ ب مثلث متساوي الساقين ؟

ب – هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١) ق (∡ ٣) = ق (∡١) + ق (∡ ٢)

٢) ق (∡ ١) = ق (∡ ٢)

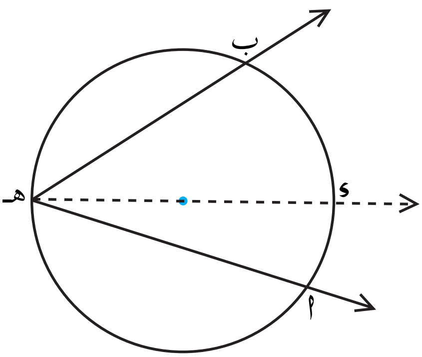
٣) ق (∡ ٣) = ٢ق (∡ ٢)

جـ – إذا كانـــت الإجابـــة فـــي (٣) صحيحـة ، هــل أنــت مقتنــع أن قياس ∡ أ هـ ب = $\frac{١}{٢}$ قياس $\overset{\frown}{أ ب}$ ؟

نشـــاط (٢)

ادرس الشكل (٥–٤٦)ثم أجب

على الأسئلة التالية :



شكل (٥ – ٤٦)

أ – هل ق (∡ أ هـ ب)

= ق (∡ أ هـ ء) + ق (∡ ء هـ ب) .

ب – هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١ ■ ق (∡ أ هـ ء) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أ ء}}$.

٢ ■ ق (∡ ء هـ ب) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{ء ب}}$.

٣ ■ ق (∡ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أ ء}}$ + $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{ء ب}}$.

٤ ■ ق (∡ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ (قياس $\overset{\frown}{\text{أ ء}}$ + قياس $\overset{\frown}{\text{ء ب}}$).

٥ ■ ق (∡ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$.

نشـــاط (٣)

ادرس الشكل (٥ – ٤٧) ، ثم أجب على الأسئلة التالية :

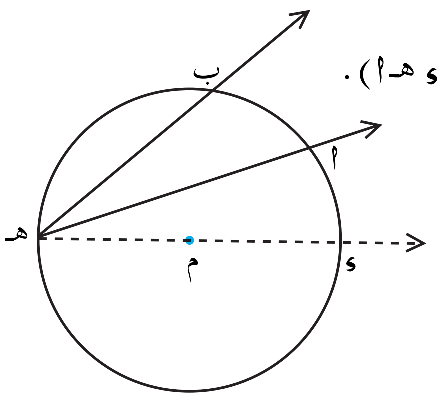
أ – هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١ ■ ق (∡ أ هـ ب) = ق (∡ ء هـ ب) – ق (∡ ء هـ أ) .

٢ ■ ق (∡ أ هـ ب)

= $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{ء ب}}$ – $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{ء أ}}$.

٣ ■ ق (∡ أ هـ ب) = $\frac{1}{2}$ قياس $\overset{\frown}{\text{أ ب}}$.



شكل (٥ – ٤٧)

ب – من خلال إجاباتك على الأنشطة الثلاثة هل أنت مقتنع أن قياس الزاوية المحيطية يساوى نصف قياس القوس المقابل لها .

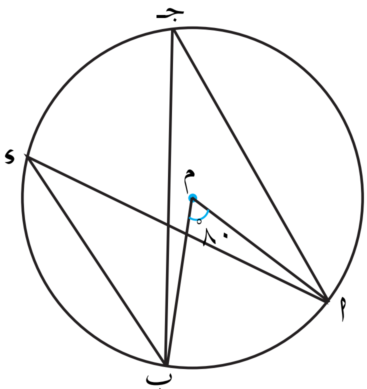
مبرهنة (٥ – ٥) :

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس القوس المقابل لها .

وبصياغة أخرى :

قياس الزاوية المحيطية يساوي نصف قياس الزاوية المركزية المشتركة معها بالقوس .

مثـــال



شكل (٥ – ٤٨)

في الشكل(٥–٤٨): أ ، ب ، جـ ، ء نقاط على الدائرة (م) . أوجد الآتي :

أ – ق (∡ أ جـ ب) .

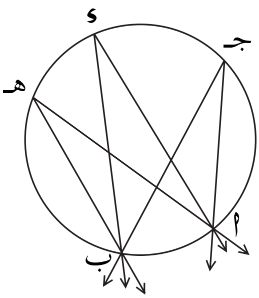
ب – ق (∡ أ ء ب) .

الحـــل :

أ – ق (∡ أ جـ ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ أ م ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠° = ٤٠°

ب – ق (∡ أ ء ب) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ أ م ب) = $\frac{١}{٢}$ × ٨٠° = ٤٠°

نشـــاط (٤)



شكل (٥ – ٤٩)

في الشكل (٥–٤٩) قس الزوايا

∡ أ جـ ب ، ∡ أ ء ب ، ∡ أ هـ ب

قارن القياسات، ماذا تلاحظ على الزوايا الثلاث؟

تلاحظ أن : الزوايا الثلاث ا جـ ب ، ا ء ب ، ا هـ ب زوايا محيطية مشتركة في قوس واحد ، كما تلاحظ أن قياسات الزوايا الثلاث متساوية .

نشــاط (٥)

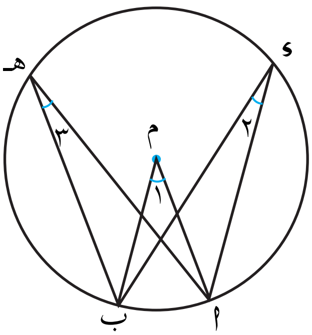
ادرس الشكل (٥ – ٥٠) ثم أجب على الأسئلة التالية :

ا – هل العبارات الآتية صحيحة ؟

١ ▪ ق (∡ ٢) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ ١) .

٢ ▪ ق (∡ ٣) = $\frac{١}{٢}$ ق (∡ ١) .

٣ ▪ هل الزاويتان ٢ ، ٣ في قطعة دائرية واحدة ؟ ماذا تلاحظ ؟ ماذا تستنتج ؟

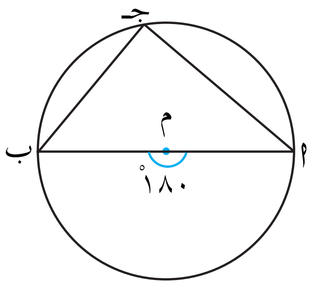


شكل (٥ – ٥٠)

مبرهنة (٥ – ٦) :

الزوايا المحيطية المشتركة في قوس واحد من الدائرة الواحدة متطابقة .

نشــاط (٦)



شكل (٥ – ٥١)

في الشكل (٥ – ٥١) ، ا ، ب ، جـ نقاط تقع على الدائرة م ، ق (∡ ا م ب) = ١٨٠°

١ – هل الزاوية ا جـ ب قائمة ؟

٢ – الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تقابل قوساً قياسه . . . .°

٣ – هل الزاوية المحيطية القائمة تقابل زاوية مركزية قياسها ١٨٠° ؟

من ذلك نستنتج المبرهنة التالية :

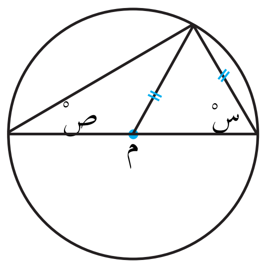
مبرهنة (٥ – ٧) :

إذا كانت الزاوية المحيطية مرسومة في نصف دائرة فإنها زاوية قائمة ،
وعكس المبرهنة صحيح أي أنه :
إذا كانت الزاوية المحيطية في الدائرة قائمة فإنها مرسومة في نصف دائرة .

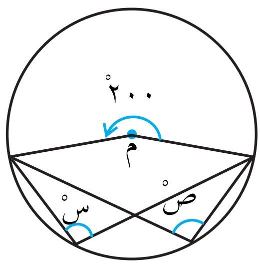
تدريب برهن المبرهنة (٥ – ٧) وعكسها .

تماريـن ومسائل

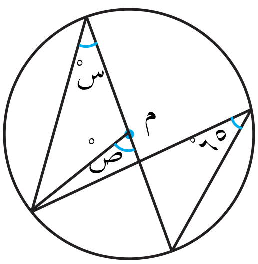
[١] في الأشكال (٥ – ٥٢أ، ب ، جـ ، ء) ، م مركز الدائرة ، أوجد قيمتي س ، ص في كل شكل .



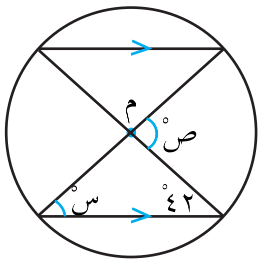
شكل (٥ –٥٢أ)



شكل (٥ –٥٢ب)



شكل (٥ –٥٢جـ)

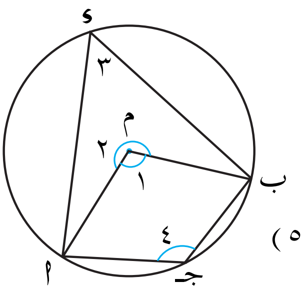


شكل (٥ –٥٢ ء)

[٢] مستعيناً بالشـكل (٥– ٥٣) :

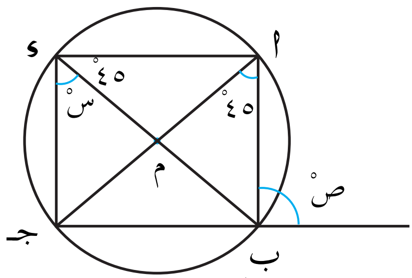
أثبت أن :

ق (∡٣) +ق (∡٤) = ١٨٠°

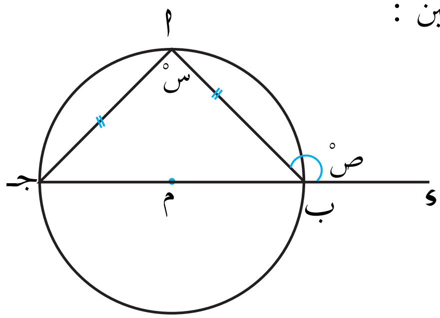


شكل (٥ – ٥٣)

[٣] في الشكلين (٥ – ٥٤ أ ، ب) ، م مركز الدائرة ، أوجد قيمتي س ، ص في كل شكل من الشكلين التاليين :



شكل (٥ – ٥٤ أ)



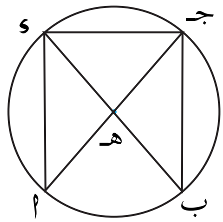
شكل (٥ – ٥٤ ب)

[٤] $\overline{\text{أب}}$ قطر في الدائرة م ، جـ نقطة على الدائرة نفسها، احسب ق (∡ أ جـ ب) .

[٥] في الشكل (٥ – ٥٥) :

$\overset{\frown}{\text{أء}} \cong \overset{\frown}{\text{ب جـ}}$. أثبت أن :

Δ هـ ء جـ مثلثا متساوي الساقين .



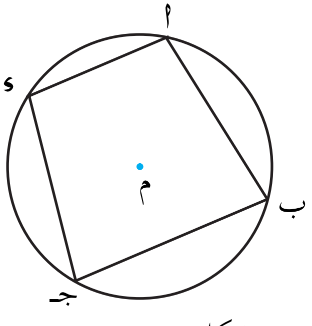
شكل (٥ – ٥٥)

٥ : ٧ الشكل الرباعي الدائري

تعلم أن أي مضلع تنتمي رؤوسه لدائرة واحدة يسمى مضلعاً دائرياً ، وعلى ذلك فالرباعي الذي تنتمي رؤوسه لدائرة واحدة يسمى رباعيا دائريا .

تأمل الشكل (٥ – ٥٦) تلاحظ أن :

أ ب جـ ء شكل رباعي مرسوم داخل دائرة بحيث تقع رؤوسه الأربعة على الدائرة (م) ، يسمى هذا الشكل رباعياً دائرياً .



شكل (٥ – ٥٦)

تسمى $\measuredangle$ ب ا ء ، $\measuredangle$ ب جـ ء زاويتين متقابلتين في الشكل الرباعي الدائري ، وكذلك $\measuredangle$ ا ب جـ ، $\measuredangle$ ا ء جـ زاويتان متقابلتان .

مبرهنة (٥ – ٨) :

مجموع قياسي الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري يساوي ١٨٠° .

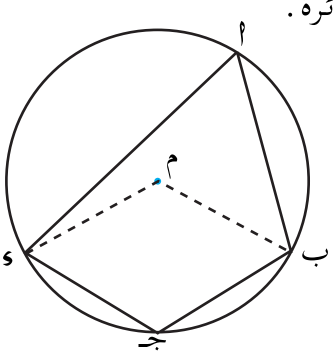
المعطيات : ا ب جـ ء شكل رباعي دائري، م مركز الدائرة.

المطلوب : إثبات أن :

أولاً : ق ($\measuredangle$ ب ا ء) + ق ($\measuredangle$ ب جـ ء) = ١٨٠°

ثانياً : ق ($\measuredangle$ ا ب جـ) + ق ($\measuredangle$ ا ء جـ) = ١٨٠°

العمل : نرسم $\overline{\text{م ب}}$ ، $\overline{\text{م ء}}$ [انظر شكل(٥–٥٧)]



شكل (٥ – ٥٧)

البرهان :

ق ($\measuredangle$ ب ا ء) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\measuredangle$ ب م ء) (مبرهنة) .... (١)

ق ($\measuredangle$ ب جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ ق ($\measuredangle$ ب م ء) المنعكسة (مبرهنة) .... (٢)

بجمع (١) ، (٢) ينتج :

ق ($\measuredangle$ ب ا ء) + ق ($\measuredangle$ ب جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ [ق ($\measuredangle$ ب م ء) + ق ($\measuredangle$ ب م ء المنعكسة]

لكن ق ($\measuredangle$ ب م ء) + ق ($\measuredangle$ ب م ء المنعكسة) = ٣٦٠° (مجموع الزوايا حول نقطة) ،

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ ب ا ء) + ق ($\measuredangle$ ب جـ ء) = $\frac{١}{٢}$ × ٣٦٠° = ١٨٠°

وهو المطلوب أولاً

∵ مجموع قياسات زوايا الشكل الرباعي = 360°

∴ ق (∡ أ ب جـ) + ق (∡ أ ء جـ) = 180°

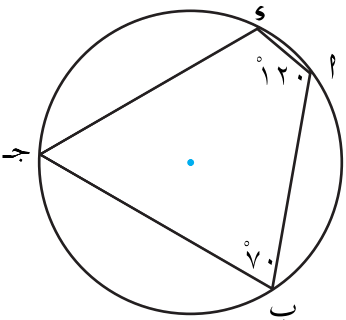
وهو المطلوب ثانياً .

مثال (١)

في الشكل (٥ – ٥٨) إذا كانت :

ق (∡ أ = 120°) ، ق (∡ ب = 70°)

فأوجد قياس كل من ∡ جـ ، ∡ ء .



شكل (٥ – ٥٨)

الحـــل :

∵ رؤوس الشكل الرباعي أ ب جـ ء تقع على الدائرة .

∴ أ ب جـ ء شكل رباعي دائري .

∴ ق (∡ أ) + ق (∡ جـ) = 180° (مبرهنة) .

∴ ق (∡ جـ) = 180° – ق (∡ أ) = $180^\circ - 120^\circ = 60^\circ$

وبالمثل ق (∡ ء) = 180° – ق (∡ ب) = $180^\circ - 70^\circ = 110^\circ$.

نشـــاط ارسم مربعاً ،معيناً ، مستطيلاً ،ومتوازي أضلاع ، ثم ارسم دائرة تمر برؤوس كل شكل من هذه الأشكال . . . ماذا تلاحظ ؟ ماذا تستنتج ؟

متى يكون الشكل رباعياً دائرياً ؟

عكس المبرهنة (٥ – ٨) :

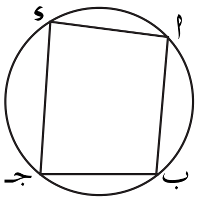
يكون الشكل رباعياً دائرياً إذا كان مجموع قياسي زاويتين متقابلتين فيه 180° .

المعطيات : أ ب جـ ء شكل رباعي فيه : ق (∡ ب) + ق (∡ ء)= 180°

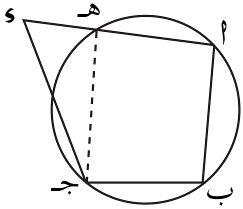
المطلوب : إِثبات أن الشكل ﺃ ب جـ ﺀ رباعي دائري .

البرهان :

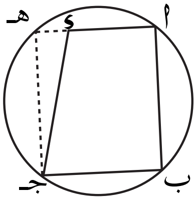
نرسم الدائرة التي تمر بالنقاط الثلاث ﺃ ، ب ، جـ (أي ثلاث نقاط ليست على إِستقامة واحدة تمر بها دائرة واحدة) .



شكل (٥ – ٥٩ ﺃ)



شكل (٥ – ٥٩ ب)



شكل (٥ – ٥٩ جـ)

فإِن مرت بالنقطة ﺀ [شكل (٥ – ٥٩ ﺃ)] تم المطلوب ، وإِن لم تمر نفرض أنّ الدائرة تقطع $\overline{\text{ﺃ ﺀ}}$ في النقطة هـ كما في الشكل (٥– ٥٩ب) أو امتداده كما في الشكل (٥ – ٥٩ جـ) ثم نصل $\overline{\text{جـ هـ}}$.

∵ الشكل ﺃ ب جـ هـ رباعي دائري . ∴ ∡ ب + ∡ هـ = ١٨٠° ،

لكن ق(∡ ب) + ق(∡ ﺀ) = ١٨٠° .

∴ ق (∡ هـ) = ق (∡ ﺀ) وهذا غير ممكن الاّ إِذا انطبقت نقطة ﺀ على نقطة هـ أي أن ﺃ ب جـ ﺀ شكل رباعي دائري وهو المطلوب.

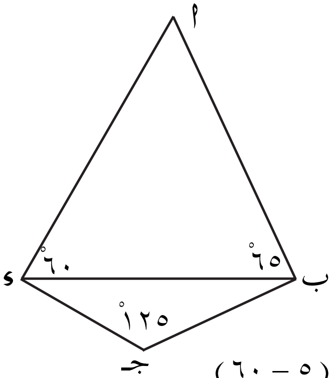
مثال (٢)

في الشكل(٥ – ٦٠) ﺃ ب جـ ﺀ رباعي،

$\overline{\text{ب ﺀ}}$ قطر فيه . ق (∡ ﺃ ب ﺀ) = ٦٥° ،

ق(∡ ﺃ ﺀ ب) = ٦٠°، ق(∡ جـ) =١٢٥° ،

أثبت أن ﺃ ب جـ ﺀ رباعي دائري .



شكل (٥ – ٦٠)

المعطيات : $\overline{\text{ب ء}}$ قطر في الشكل الرباعي ا ب جـ ء ، حيث :

ق (∡ ا ب ء) = ٦٥° ، ق (∡ ا ء ب) = ٦٠° ، ق (∡ ب جـ ء) = ١٢٥°

المطلوب : إثبات أن : ا ب جـ ء رباعي دائري .

البرهان : في المثلث ا ب ء .

ق(∡ ب ا ء) = ١٨٠° − [ق (∡ ا ب ء) + ق (∡ ا ء ب)] .

= ١٨٠° − (٦٥° + ٦٠°) = ١٨٠° − ١٢٥° = ٥٥°

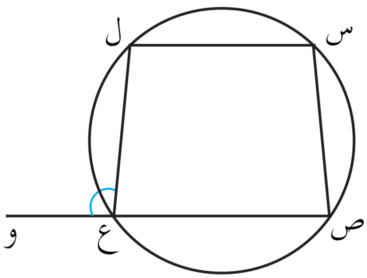
∵ ق (∡ ب ا ء) + ق (∡ ب جـ ء) = ٥٥° + ١٢٥° = ١٨٠°

∴ ا ب جـ ء شكل رباعي دائري (لأن فيه ∡ ا ، ∡ جـ زاويتان متقابلتان متكاملتان) .

الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري :

إذا مدّ أحد أضلاع الشكل الرباعي الدائري على استقامته ، فإن الزاوية المحصورة بين امتداد هذا الضلع والضلع المجاور له تسمى زاوية خارجة عن الشكل الرباعي الدائري انظر الشكل (٥ – ٦١) :

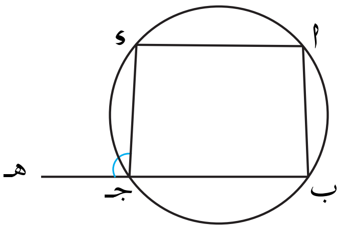
س ص ع ل شكل رباعي دائري ، مدّ $\overline{\text{ص ع}}$ على استقامته إلى و ، ∡ ل ع و هي زاوية خارجة عن الشكل الرباعي الدائري س ص ع ل .



شكل (٥ – ٦١)

مبرهنة (٥ – ٩) :

الزاوية الخارجة عن الشكل الرباعي الدائري تساوي الزاوية المقابلة للزاوية المجاورة لها .



شكل (٥ – ٦٢)

المعطيات : أ ب جـ ء شكل رباعي دائري

مدّ $\overline{\text{ب جـ}}$ إلى هـ [انظر

الشكل (٥–٦٢)] .

المطلوب : إثبات أن ق(∢ ء جـ هـ)= ق (∢ ب أ ء) .

البرهان : ق (∢ ء جـ هـ) + ق (∢ ب جـ ء) = ١٨٠° (١)

(لأن ∢ ب جـ هـ مستقيمة)

ق (∢ ب جـ ء) + ق (∢ ب أ ء) = ١٨٠° (مبرهنة) (٢)

بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∢ ء جـ هـ) = ق (∢ ب أ ء) وهو المطلوب .

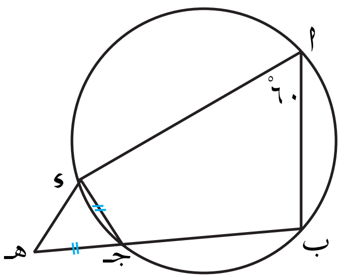
مثال (٣)

في الشكل (٥ – ٦٣) : أ ب جـ ء شكل رباعي دائري فيه ق (∢ ب أ ء) = ٦٠° . مدّ $\overline{\text{ب جـ}}$ إلى هـ ، بحيث |جـ هـ| = |جـ ء| ، أثبت أن المثلث جـ ء هـ متساوي أضلاع .

المعطيات : أ ب جـ ء شكل رباعي دائري،

ق (∢ ب أ ء) = ٦٠° ،

|جـ هـ| = |جـ ء|



شكل (٥ – ٦٣)

المطلوب : إثبات أن :

المثلث جـ ء هـ متساوي أضلاع .

البرهان :

∵ ∢ ء جـ هـ خارجة عن الشكل الرباعي الدائري أ ب جـ ء .

∴ ق (∡ ء جـ هـ) = ق (∡ ب ٱ ء) = ٦٠° مبرهنة (١)

في Δ جـ ء هـ : ق (∡ جـ ء هـ) + ق (∡ ء هـ جـ) = ١٨٠° – ٦٠° = ١٢٠° .

∵ | جـ هـ | = | جـ ء | (معطى)

∴ ق (∡ جـ هـ ء) = ق (∡ جـ ء هـ) = $\frac{١٢٠}{٢}$ = ٦٠° (٢)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∡ ء جـ هـ) = ق (∡ جـ هـ ء) = ق (∡ جـ ء هـ) = ٦٠°

∴ Δ جـ ء هـ متساوي أضلاع .

تمارين ومسائل

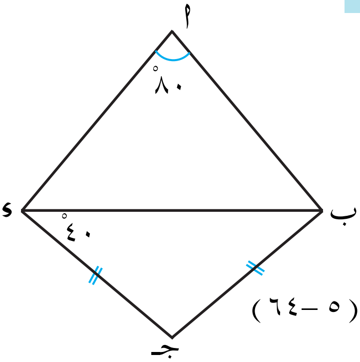
[١] في الشكل (٥ – ٦٤) :

ٱ ب جـ ء رباعي ، $\overline{\text{ب ء}}$ قطر فيه

| ب جـ | = | جـ ء | ، ق (∡ ب ٱ ء) = ٨٠° ،

ق (∡ ب ء جـ) = ٤٠° .

أثبت أن : ٱ ب جـ ء رباعي دائري .



شكل (٥ – ٦٤)

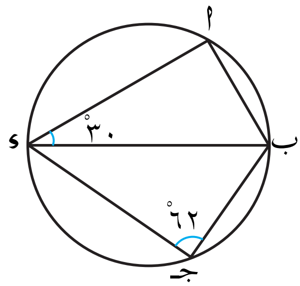
[٢] في الشكل (٥ – ٦٥) :

ٱ ب جـ ء رباعي دائري .

إذا كان ق (∡ ب جـ ء) = ٦٢° ،

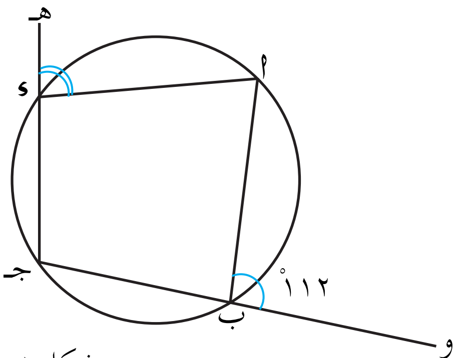
ق (∡ ب ء ٱ) = ٣٠° .

فأحسب قياس ∡ ٱ ب ء .



شكل (٥ – ٦٥)

[٤] في الشكل (٥ – ٦٦) :
ق (∢ أ ب و) = ١١٢° ،
أوجد قياس ∢ أ ء هـ .



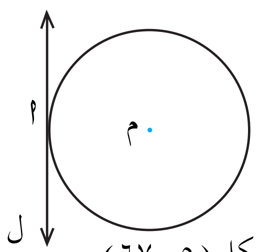
شكل (٥ –٦٦)

[٥] أ ب جـ مثلث متساوي الساقين، فيه | أ ب | = | أ جـ | ، س نقطة على $\overline{\text{أ ب}}$ ،
ص نقطة على $\overline{\text{أ جـ}}$ ، بحيث $\overline{\text{س ص}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.
أثبت أن : ب جـ ص س رباعي دائري .

[٦] دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، رسم المستقيم جـ أ ء يقطع الاولى في جـ والثانية في ء . ورسم المستقيم هـ ب و يقطع الأولى في هـ والثانية في و . برهن على أن جـ هـ يوازي ء و .

٥ : ٨ المماس

سبق أن تعرفت على الحالات الثلاث للاوضاع النسبية بين مستقيم ودائرة وهي :
(١) أن يقطع المستقيم الدائرة في نقطتين.
(٢) لاتوجد أية نقطة مشتركة بين المستقيم والدائرة.
(٣) توجد فقط نقطة واحدة مشترك بين المستقيم والدائرة

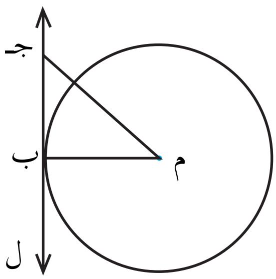


شكل (٥ –٦٧)

وفي الحالة الثالثة يسمى المستقيم مماساً للدوائرة وتسمى النقطة المشتركة نقطة التماس .

انظر الشكل (٥ – ٦٧) :
المستقيم ل مماس للدائرة (م) ، أ هي نقطة التماس .

نشـــــاط



شكل (٥ – ٦٨)

(١) ارسم دائرة مركزها (م) .

(٢) حدد نقطة مثل (ب) على محيط الدائرة فيكون $\overline{\text{م ب}}$ نصف قطر في الدائرة.

(٣) ارسم المستقيـم ل عمودياً على $\overline{\text{م ب}}$ عند النقطة ب .

هل $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مماس للدائرة في نقطة (ب) ؟

للإجابة عن ذلك خذ نقطة اخرى مثل جـ $\in \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ثم صل النقطة جـ بمركز الدائرة (م) . ماذا تلاحظ ؟

ستلاحظ أن : $|\text{م جـ}| > |\text{م ب}|$.

لكن $|\text{م ب}| =$ نق .

$\therefore$ $|\text{م جـ}| >$ نق .

إذن نقطة جـ لاتنتمي للدائرة (م) ، وهكذا كل نقطة تنتمي للمستقيم ل غير النقطة ب يكون البعد بينها وبين مركز الدائرة دائماً أكبر من نصف قطر الدائرة أي أن : ب هي النقطة الوحيدة التي تنتمي إلى كل من المستقيم ل والدائرة . مما سبق يمكن القول أن :

المستقيـم العمودي على نصف قطر دائرة من نقطة نهايتـه علـى الدائرة يكون مماساً للدائرة عند هذه النقطة .

مبرهنة (٥ - ١٠)

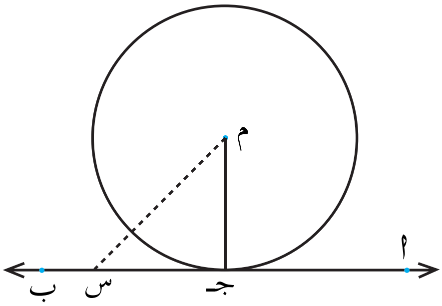
مماس الدائرة يكون عمودي على نصف القطر المار بنقطة التماس

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمس الدائرة (م) في نقطة جـ ، $\overline{\text{م جـ}}$ نصف قطر .

[انظر الشكل (٥ - ٦٩)] .

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{م جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$

العمل : نأخذ نقطة مثل س على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ ونصل $\overline{\text{م س}}$.



شكل (٥ - ٦٩)

البرهان :

∵ $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ يمس الدائرة في جـ .

∴ كل نقطة على المماس غير نقطة جـ تقع خارج الدائرة ، لذلك نقطة س تقع خارج الدائرة .

∴ $|\text{م س}| > |\text{م جـ}|$.

لكن $\overline{\text{م جـ}}$ نصف قطر في الدائرة .

وبالمثل يمكن إثبات أن م جـ أصغر من أي مستقيم واصل من المركز(م) إلى أي نقطة على $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ غير جـ .

∴ $\overline{\text{م جـ}}$ أقصر القطع المستقيمة الواصلة من م إلى $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$.

∴ $\overline{\text{م جـ}} \perp \overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ وهو المطلوب .

نتيجة (١)

لايمكن رسم أكثر من مماس واحد لدائرة من نقطة عليها .

نتيجــة (٢)

العمود المقام على مماس دائرة من نقطة التماس يمر بمركزها .

مثــــال

$\overline{أب}$ قطر في الدائرة (م) ، $\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس للدائرة م ، رسم $\overline{جـ أ}$ فقطع المحيط في (ء) ، أثبت أن : ق (∢ ء م أ) = ٢ ق (∢ أ جـ ب) .

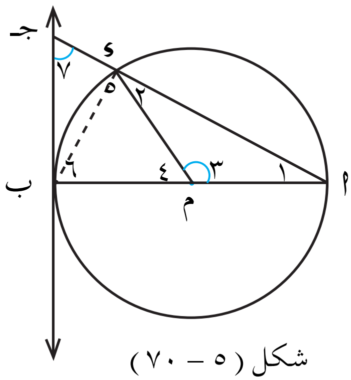
المعطيات : $\overline{أ ب}$ قطر في الدائرة (م) ،

$\overleftrightarrow{ب جـ}$ مماس لها ، $\overline{جـ أ}$ يقطع الدائرة في (ء)

المطلوب : إثبات أن :

ق (∢ ء م أ) = ٢ ق (∢ أ جـ ب)

العمل : نرسم $\overline{ب ء}$.



شكل (٥ – ٧٠)

البرهان :

انظر الشكل (٥ – ٧٠)

في Δ م أ ء : ق (∢١) = ق (∢ ٢) لأن (|م أ| = |م ء|) ـــ (١)

في Δ م ء ب : ق (∢ ٥) = ق (∢ ٦) لأن (|م ء| = |م ب|) ـــ (٢)

في Δ أ ب جـ القائم في ب : ق (∢ ١) + ق (∢٧) = ٩٠° ـــ (٣)

بالمثل ق (∢ ١) + ق (∢ ٦) = ٩٠° ــــــ (٤)

من (٣) ، (٤) ينتج أن :

ق (~~∢ ١~~) + ق (∢٧) = ق (~~∢ ١~~) + ق (∢ ٦)

∴ ق (∢ ٧) = ق (∢ ٦)

ولكن ∢ ٤ تكمل ∢ ٣

، ∵ ق (∢ ٣) = ق (∢ ٥) + ق (∢ ٦)

∴ ∢ ٤ تكمل ٢ ق (∢ ٦) ،

∵ ق (∢ ٦) = ق (∢ ٧)

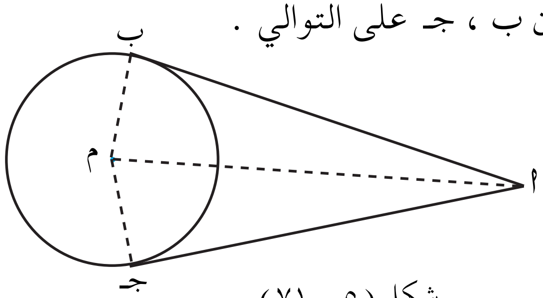
∴ ق (∢ ٣) = ٢ ق (∢ ٧)

∴ ق (∢ أ م ء) = ٢ ق (∢ أ جـ ب) وهو المطلوب .

مبرهنة (٥ – ١١)

المماسان المرسومان لدائرة من نقطة خارجها متطابقان .

المعطيات : في الشكل (٥–٧١) : أ نقطة خارج الدائرة (م) . $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماسان لها عند النقطتين ب ، جـ على التوالي .



شكل (٥ – ٧١)

المطلوب : إثبات أن :

| أ ب | = | أ جـ | .

العمل :

نرسم $\overline{\text{أ م}}$ ، $\overline{\text{جـ م}}$ ، $\overline{\text{ب م}}$.

البرهان :

في ΔΔ أ ب م ، أ جـ م
- ق (∢ أ ب م) = ق (∢ أ جـ م) = ٩٠° (مبرهنة)
- | ب م | = | جـ م | = نق
- $\overline{\text{أ م}}$ ضلع مشترك .

∴ Δ أ ب م ≅ Δ أ جـ م

ومن ذلك ينتج أن | أ ب | = | أ جـ | وهو المطلوب .

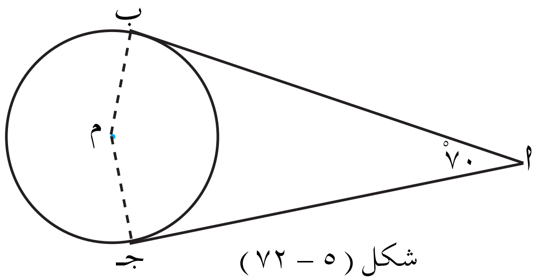
نتيجـة (١)

المماسان المرسومان من نقطة خارج دائرة يقابلان زاويتين مركزيتين متطابقتين.

نتيجـة (٢)

القطعة المستقيمة الواصلة بين مركز دائرة ونقطة خارجها تنصف الزاوية التي ضلعاها مماسا الدائرة من تلك النقطة.

مثال (٢)



شكل (٥ – ٧٢)

النقطة أ خارج الدائرة م ، رسم المماسان $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ يمسان الدائرة في ب ، جـ .

فإذا كان ق (∢ ب أ جـ) = ٧٠° ، فأوجد ق (∢ ب م جـ) انظر الشكل (٥ – ٧٢) .

الحـل :

المعطيات : أ نقطة خارج الدائرة م ، $\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{أ جـ}}$ مماسان لدائرة ، ق(∢ ب أ جـ) = ٧٠° .

المطلوب : إيجاد ق (∢ ب م جـ)

أ ب م جـ شكل رباعي .

∴ ق(∢ جـ أ ب) + ق (∢ أ ب م) + ق (∢ ب م جـ) + ق (∢ م جـ أ) = ٣٦٠°

∴ ٧٠° + ٩٠° + ق (∢ ب م جـ) + ٩٠° = ٣٦٠°

∴ ق (∢ ب م جـ) = ٣٦٠° – (٧٠° + ٩٠° + ٩٠°)

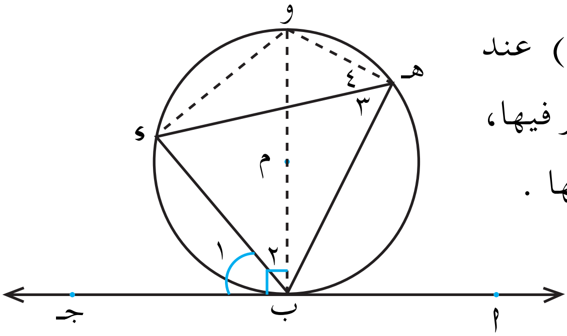
= ٣٦٠° – ٢٥٠° = ١١٠° .

مبرهنة (٥ – ١٢)

« قياس الزاوية المحصورة بين المماس والوتر المار بنقطة التماس يساوي قياس الزاوية المحيطية المقابلة لوتر التماس من الجهة الأخرى » .

المعطيات : $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ مماس للدائرة (م) عند النقطة (ب)، $\overline{\text{ب ء}}$ وتر فيها،

∡ ب هـ ء محيطية فيها .



شكل (٥ – ٧٣)

المطلوب : إثبات أن :

ق (∡ جـ ب ء) = ق (∡ ب هـ ء) .

العمل : نرسم القطر $\overline{\text{ب و}}$، ثم نرسم $\overline{\text{وهـ}}$، $\overline{\text{و ء}}$ [انظر الشكل (٥ –٧٣)].

البرهان :

∵ $\overline{\text{ب و}}$ ⊥ $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ (مبرهنة)

∴ ق (∡ ١) + ق (∡ ٢) = ٩٠°

ق (∡ ٣) + ق (∡ ٤) = ٩٠° (مبرهنة)

∴ ق (∡ ١) + ق (∡ ٢) = ق (∡ ٣) + ق (∡ ٤) .... (١)

ولكن ق (∡ ٤) = ق (∡ ٢) (محيطيتان تقابلان نفس القوس). . . . .(٢)

بمقارنة (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∡ ٣) = ق (∡ ١)

أي أن : ق (∡ ب هـ ء) = ق (∡ جـ ب ء) وهو المطلوب .

نتيجة (٣) :

«إذا رسم مستقيم من إحدى نهايتي وتر في دائرة يصنع معه زاوية تساوي بالقياس الزاوية المحيطية المقابلة للوتر من الجهة الأخرى كان ذلك المستقيم مماساً للدائرة » .

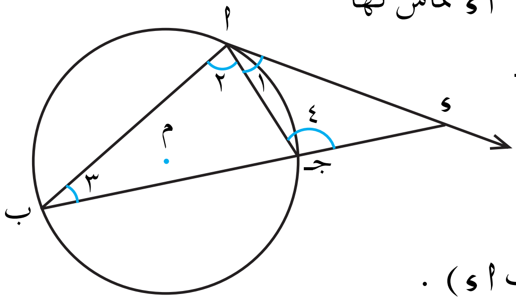
مثال (٣)

$\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة (م) ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ مماس لها في أ ، رسم $\overline{\text{ب ء}}$ فقطع محيط الدائرة في جـ . اثبت أن : ق (∡ أ جـ ء) = ق (∡ ب أ ء) .

المعطيات : $\overline{\text{أ ب}}$ وتر في الدائرة م ، $\overleftarrow{\text{أ ء}}$ مماس لها

$\overline{\text{ب ء}}$ يقطع الدائرة في جـ

[انظر الشكل(٥–٧٤)]



شكل (٥ – ٧٤)

المطلوب : إثبات أن :

ق (∡ أ جـ ء) = ق (∡ ب أ ء) .

البرهان :

$\overleftarrow{\text{أ ء}}$ مماساً ، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتر التماس (معطى)

∴ ق (∡ ١) = ق (∡ ٣) —— (١) (مبرهنة ٥ – ١٢)

∡ ٤ خارجة عن المثلث أ ب جـ

∴ ق (∡ ٤) = ق (∡ ٢) + ق (∡ ٣) —— (٢) (مبرهنة)

من (١) ، (٢) ينتج أن :

ق (∡ ٤) = ق (∡ ٢) + ق (∡ ١)

أي أن : ق (∡ أ جـ ء) = ق (∡ ب أ ء) وهو المطلوب .

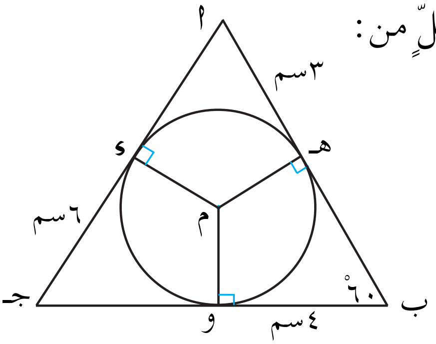
تمارين ومسائل

[١] م دائرة ، أب قطر فيها ، جـ نقطة على محيطها ، مد ب أ إلى النقطة « ء » ، ثم وصل ء جـ . فإذا كان ق (∠ أ جـ م) = ٦٠° وكان ء جـ مماساً للدائرة . فأثبت أن المثلث أ جـ ء متساوي الساقين .

[٢] م دائرة قطرها أ ب فرضت نقطة جـ على محيطها بحيث كان |جـ أ| = |جـ ب| ،ثم رسم لها مماساً من النقطة (أ) لاقى امتداد ب جـ في النقطة « هـ » ، أثبت أن : |أ جـ| = |هـ جـ| .

[٣] أ ب قطر في دائرة أ جـ ، أ ء وتران في جهة واحدة من أ ب ، مدّا كل من أ جـ ، أ ء حتى لاقيا المماس المرسوم من النقطة ب في النقطتين س ، ص على الترتيب ، أثبت أن الشكل س جـ ء ص رباعي دائري .

[٤] استعن بالشكل(٥–٧٥) : لإيجاد كلٍّ من :
|أ ب|، |ب جـ|، |أ جـ| ،
ق (∠ هـ م و) .



شكل (٥ – ٧٥)

[٥] رسم القطر أ ب في الدائرة (م) وفرضت النقطة جـ على الدائرة ، ثم رسم منها مماساً للدائرة، فإذا رسمت أ ء عمودية على المماس ، برهن أن :
أ جـ ينصف ∠ ب أ ء .

[٦] أ ب وتر في دائرة مركزها (م) ، ب س مماساً لها ، جـ نقطة على ب س بحيث |أ ب| = |ب جـ| ، رُسم جـ أ فقطع محيط الدائرة في ء ، أثبت أن Δ ب ء جـ متساوي الساقين .

[٧] $\overline{\text{أ ب}}$ قطر في الدائرة (م)، $\overline{\text{ب جـ}}$ وتر فيها ، رسم من النقطة جـ مماس للدائرة ، ثم رسم $\overline{\text{م ء}}$ ينصف ∢ جـ م ب ، ويلاقي المماس في النقطة (ء) . فإذا كان ق (∢ م جـ ب) = ٣٠° ، فأثبت أن :

أولاً : ق (∢ ء جـ ب) = ق (∢ ء م ب) = ٦٠° .

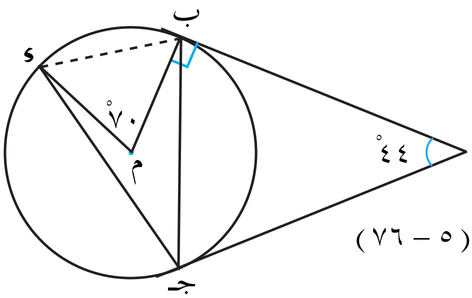
ثانياً : الشكل ء ب م جـ رباعي دائري . ثالثاً : $\overline{\text{ء ب}}$ مماس للدائرة في ب .

[٨] $\overline{\text{أ ب}}$، $\overline{\text{أ جـ}}$ وتران متطابقان في دائرة، $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ مماس لها. برهن أن: $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$ // $\overline{\text{ب جـ}}$.

[٩] في الشكل (٥ – ٧٦)

أوجد مع البرهان :

ق (∢ جـ ب ء) .



شكل (٥ – ٧٦)

[١٠] أ ب جـ ء رباعي دائري،رسم من النقطتين أ ، ب المماسان $\overleftrightarrow{\text{أ هـ}}$، $\overleftrightarrow{\text{ب هـ}}$ فتقاطعا في النقطة (هـ)،فإذا كان : ق(∢ أ هـ ب)=٧٠°، ق(∢ ء أ جـ)=٤٠°، ق (∢ أ ب ء)=٣٩° ، فأوجد قياس زوايا المثلث أ ب جـ

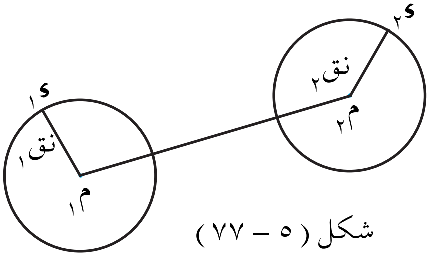
٥ : ٩ الأوضاع النسبية لدائرتين

هناك ثلاث حالات للأوضاع النسبية لدائرتين وهي :

أولاً : دائرتان منفصلتان :

في هذه الحالة لاتوجد أي نقطة مشتركة بين الدائرتين أي أن :

$م_1 \cap م_2 = \Phi$ ويقال عنهما دائرتان منفصلتان وفيهما حالتان هما :

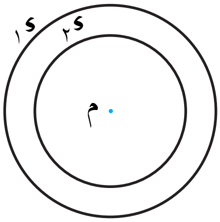


شكل (٥ – ٧٧)

الحالة الأولى : الدائرتــان متبــاعدتــان وأن خط المركزين (البعــد بين المركزين)$\text{م}_{١}\text{م}_{٢}$ يكون : أكبــر مـــن مجمـــوع طولي نصفــي القطرين للدائرتين . أي أن $|\text{م}_{١}\text{م}_{٢}| > \text{نق}_{١} + \text{نق}_{٢}$

[انظر الشكل (٥ – ٧٧)] .

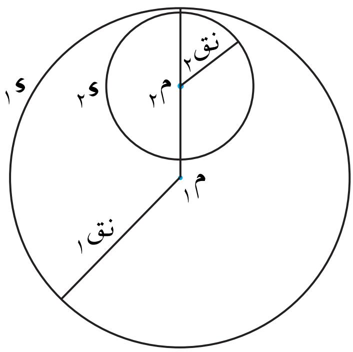
الحالة الثانية : إحداهما تحوى الأخرى وبالتالي .



شكل (٥ – ٧٨)

اما أن تشتــــركا في المركــــز وفي هــذه الحالة نجــد أن خــط المركزين يكون: $|\text{م}_{١}\text{م}_{٢}| = $ صفراً

[انظر الشكل (٥ –٧٨)] .



شكل (٥ – ٧٩)

واما أنهمــا مختلفتــا المركزين وفــي هذه الحالة خط المركزين يكون أصغر من مجمــــوع نصفــي قطريهمــا أي أن :

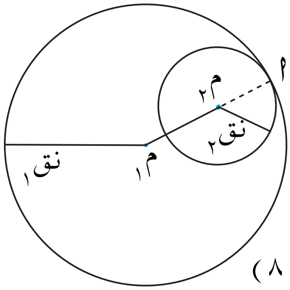
$$|\text{م}_{١}\text{م}_{٢}| < \text{نق}_{١} + \text{نق}_{٢}$$

[انظر الشكل (٥ – ٧٩)].

ثانياً : دائرتان متماستان :

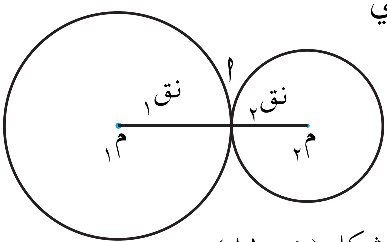
فــي هــذه الحالة توجد نقطة واحدة مشتركة (نقطة تماس) بين الدائرتين $\text{م}_{١}$ ، $\text{م}_{٢}$ أي أن : $\text{م}_{١} \cap \text{م}_{٢} = \{\text{ا}\}$ حيث ا نقطة التماس ، وفي هذه الحالة يقال أن الدائرتين متماستان وهناك حالتان هما :

الحالة الأولى : الدائرتان متماستان من الداخل
في نقطة ﺃ [انظر الشكل(٥–٨٠)]
فيكون $\left|م_{١}م_{٢}\right| = نق_{١} - نق_{٢}$



شكل (٥ – ٨٠)

الحالة الثانية : الدائرتان متماستان من الخارج في
نقطة ﺃ [انظر الشكل(٥–٨١)]
فيكون $\left|م_{١}م_{٢}\right| = نق_{١} + نق_{٢}$

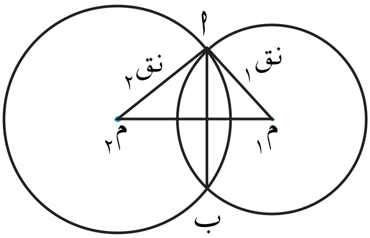


شكل (٥ – ٨١)

ثالثاً : دائرتان متقاطعتان :

في هذه الحالة توجد نقطتان مشتركتان أو أكثر بين الدائرتين ، وفيها حالتان :

الحالة الأولى :الدائرتان المتقاطعتان بنقطتين فقط هما ﺃ ، ب
[انظر الشكل(٥–٨٢)] ،
$م_{١} \cap م_{٢} = \{ ﺃ ، ب \}$ حيث
ﺃ ، ب نقطتا التقاطع ويكون :
$\left|م_{١}م_{٢}\right| < نق_{١} + نق_{٢}$
ويسمى $\overline{ﺃب}$ وتر مشترك للدائرتين .



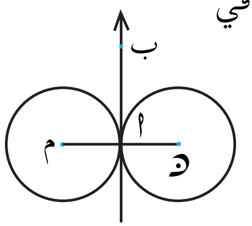
شكل (٥ – ٨٢)

الحالة الثانية :الدائرتان متقاطعتان بأكثر من نقطتين ، فهما متطابقتان ، أي أن :
$م_{١} \cap م_{٢} = م_{١} \cup م_{٢}$ ، ويكون $\left|م_{١}م_{٢}\right| =$ صفراً

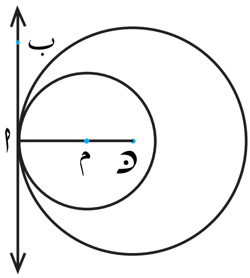
مبرهنة (٥ - ١٣) :

نقطـــة التمـاس لدائرتين تقـع على خـــط المـركزيـن .

المعطيات : م ، د دائرتان متماستان في النقطـة ا [انظر الشكلين (٥-٨٣ا، ب)].



شكل (٥ - ٨٣ا)



شكل (٥ - ٨٣ب)

المطلوب : إثبات أن :

م، ا ، د على استقامة واحدة

البرهان :

∵ $\overleftarrow{\text{ا ب}}$ مماس مشترك للدائرتين عند ا

∴ ق (∢ ب ا د) = ٩٠°

ق (∢ ب ا م) = ٩٠°

∴ ق (∢ ب ا د) + ق (∢ ب ا م) = ١٨٠° [انظر الشكل (٥-٨٣ا)]

∴ ∢ ب ا د منطبقة على ∢ ب ا م [انظر الشكل (٥ - ٨٣ ب)]

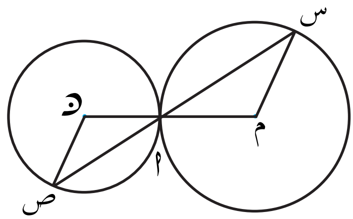
∴ م ، ا ، د على استقامة واحدة ،

وحيث أن $\overline{\text{م د}}$ هو خط المركزين ،

∴ النقطة ا (نقطة التماس) تقع على خط المركزين . وهو المطلوب .

مثال (١)

م ، د دائرتان متماستان من الخارج في نقطة ا . رسم $\overline{\text{س ص}}$ يمر بالنقطة ا بحيث يقطع الدائرة م في س ، الدائرة د في ص ، أثبت أن : $\overline{\text{س م}}$ // $\overline{\text{ص د}}$.



شكل (٥ – ٨٤)

المعطيات : م ، د دائرتان متماستان من الخارج في نقطة أ ، $\overline{\text{س ص}}$ يمر بالنقطة أ، يقطع م في س، د في ص .

المطلوب : إثبات أن : $\overline{\text{س م}}$ // $\overline{\text{ص د}}$.

العمـــل : نرسم خط المركزين $\overline{\text{م د}}$ [انظر الشكل (٥ – ٨٤)] .

البرهان : | أ م | = | م س | = نق

∴ ق (∢ م س أ) = ق (∢ م أ س) ...(١) [Δ م س أ متساوي الساقين]

بالمثل ق(∢ د ص أ)=ق(∢ د أ ص) ...(٢) [Δ د ص أ متساوي الساقين]

ولكن ق (∢ م أ س) = ق (∢ د أ ص) ...(٣) (بالتقابل بالرأس)

بمقارنة (١) ، (٢) ، (٣) نحصل على أن :

ق (∢ م س أ) = ق (∢ د ص أ) وهما متبادلتان .

∴ $\overline{\text{س م}}$ // $\overline{\text{ص د}}$ وهو المطلوب .

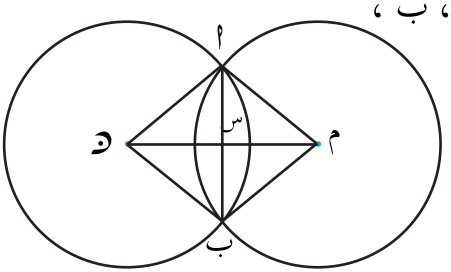
مبرهنة (٥ – ١٤) :

خط المركزين لدائرتين متقاطعتين يكون عمودياً على الوتر المشترك وينصفه.

المعطيات : م، د دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، $\overline{\text{م د}}$ يقطع الوتر المشترك $\overline{\text{أ ب}}$ في س.

المطلوب : إثبات أن:

$\overline{\text{م د}}$ ⊥ $\overline{\text{أ ب}}$ وينصفه .



شكل (٥ – ٨٥)

العمل : نرسم $\overline{أ م}$ ، $\overline{ب م}$ ، $\overline{أ ﻫ}$ ، $\overline{ب ﻫ}$ [انظر الشكل (٥ – ٨٥)] .

البرهان : ∆∆ : أ م ﻫ ، ب م ﻫ فيهما
| أ م | = | ب م | = نق$_١$
| أ ﻫ | = | ب ﻫ | = نق$_٢$
$\overline{م ﻫ}$ ضلع مشترك

∴ ∆ أ م ﻫ ≅ ∆ ب م ﻫ .

∴ ق (∢ أ م ﻫ) = ق (∢ ب م ﻫ)

∵ ∆ أ م ب متساوي الساقين فيه (| أ م | = | ب م |) ، $\overline{م س}$ منصف زاوية الرأس م .

∴ $\overline{م س}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ وينصفه (مبرهنة)

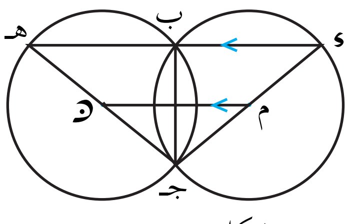
∴ $\overline{م ﻫ}$ ⊥ $\overline{أ ب}$ وينصفه وهو المطلوب .

مثال (٢)

الدائرتان م ، ﻫ متقاطعتان في ب ، جـ ، رسم $\overleftrightarrow{ء هـ}$ يمر بالنقطة ب ، ويوازي $\overline{م ﻫ}$ فقطع الدائرتين م ، ﻫ في ء ، هـ على التوالي .

أثبت أن : ١) $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{ء هـ}$ ٢) | ء هـ | = ٢ | م ﻫ | .

المعطيات : م، ﻫ دائرتان متقاطعتان في ب ، جـ ،
$\overline{ء هـ}$ يمر بالنقطة ب ويقطع م في
ء ، ﻫ في هـ ،
$\overline{ء هـ}$ // $\overline{م ﻫ}$
[انظر الشكل(٥–٨٦)].



شكل (٥ – ٨٦)

المطلوب : إثبات أن : أولاً : $\overline{ب جـ}$ ⊥ $\overline{ء هـ}$ ثانياً : | ء هـ | = ٢ | م ﻫ | .

البرهان : $\overline{\text{ب جـ}}$ وتر مشترك (معطى)

$\overline{\text{م ﻫ}} \perp \overline{\text{ب جـ}}$ وينصفه (مبرهنة)

$\overline{\text{م ﻫ}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$ (معطى)

$\therefore \overline{\text{ب جـ}} \perp \overline{\text{ء هـ}}$ (وهو المطلوب أولاً) .

في Δ جـ ء هـ : $\overline{\text{م ﻫ}} \parallel \overline{\text{ء هـ}}$ ، $\overline{\text{م ﻫ}}$ ينصف $\overline{\text{ء جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ هـ}}$

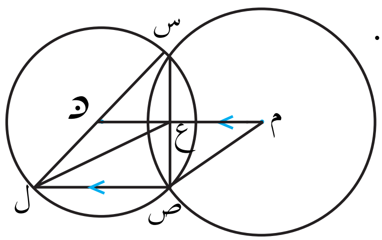
$\therefore |\text{م ﻫ}| = \frac{1}{2} |\text{ء هـ}|$.

$\therefore |\text{ء هـ}| = 2 |\text{م ﻫ}|$ وهو المطلوب ثانياً .

مثال (٣)

م ، ﻫ دائرتان متقاطعتان في س ، ص ، رسم $\overline{\text{م ﻫ}}$ فقطع $\overline{\text{س ص}}$ في ع بحيث كان $|\text{م ع}| = 2 |\text{ع ﻫ}|$، ثم رسم $\overleftrightarrow{\text{س ﻫ}}$ ومد حتى لاقى محيط الدائرة ﻫ في ل .

اثبت أن : الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع .



شكل (٥ –٨٧)

المعطيات : م ، ﻫ دائرتان متقاطعتان في س ، ص

$\overline{\text{م ﻫ}}$ ، $\overline{\text{س ص}}$ يتقاطعان في ع

$|\text{م ع}| = 2 |\text{ع ﻫ}|$

رسم $\overline{\text{س ﻫ}}$ ومد حتى لاقى محيط الدائرة ﻫ في ل [انظر الشكل(٥–٨٧)] .

المطلوب : إثبات أن : الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع .

البرهان :

$\overline{\text{م ﻫ}} \perp \overline{\text{س ص}}$ وينصفه (مبرهنة)

$|\text{س ع}| = |\text{ع ص}|$

في Δ س ص ل : $\overline{ع د}$ ينصف $\overline{س ص}$ ، $\overline{س ل}$

∴ $\overline{ع د}$ // $\overline{ص ل}$ ، $|ع د| = \frac{١}{٢} |ص ل|$

∴ $\overline{م د}$ // $\overline{ص ل}$ ....(١)

، ∵ $|م ع| = ٢ |ع د|$ (معطى)

∴ $|م ع| = |ص ل|$ .... (٢)

في الشكل م ص ل ع :

من (١) : $\overline{م ع}$ // $\overline{ص ل}$

ومن (٢) $|م ع| = |ص ل|$.

∴ الشكل م ص ل ع متوازي أضلاع وهو المطلوب .

تمارين ومسائل

[١] دائرتان متماسان ، نصف قطريهما ٣سم ، ٢سم ، ما المسافة بين مركزيهما

أ) إذا كانتا متماستين من الداخل . ب) إذا كانتا متماستين من الخارج .

[٢] م ، د دائرتان متماستان من الخارج في ب ، س نقطة خارجهما رسم منها المماس المشترك $\overline{س ب}$ والمماس $\overline{س أ}$ للدائرة م ، والمماس $\overline{س جـ}$ للدائرة د . أثبت أن : $|س أ| = |س ب| = |س جـ|$.

[٣] م ، د دائرتان متماستان من الخارج في أ ، رسم $\overline{ب جـ}$ المماس المشترك لهما مس د في ب ، ومس م في جـ . أثبت أن :

أ) المماس المشترك للدائرتين عند أ ينصف $\overline{ب جـ}$.

ب) ق (∢ ب أ جـ) = ٩٠°

[٤] في الشكل (٥ – ٨٨) : م ، ن

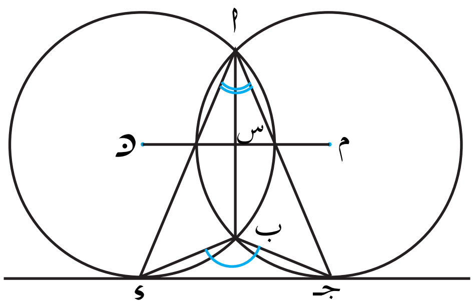
دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ،

$\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ مماس مشترك لهما ،

وخط المركزين $\overline{\text{م ن}}$ يقطع الوتر

المشترك $\overline{\text{أ ب}}$ في النقطة س .

أثبت أن :



شكل (٥ – ٨٨)

ق (∡ جـ أ ء) + ق (∡ جـ ب ء) = ١٨٠° .

[٥] في الشكل (٥ – ٨٩) : م ، ن

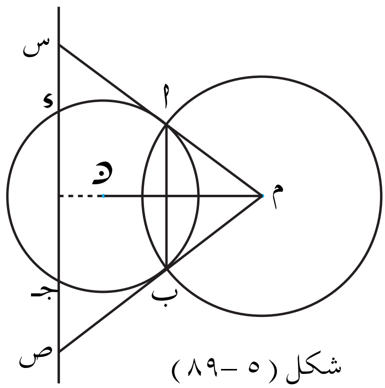
دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ،

رسم الوتر $\overline{\text{ء جـ}}$ في الدائرة

الصغرى ن موازٍ $\overline{\text{أ ب}}$ حيث

$\overline{\text{أ ب}}$ ، $\overline{\text{ء جـ}}$ في جهتين

مختلفتين من ن مركز الدائرة



شكل (٥ –٨٩)

الصغرى . رسم $\overline{\text{م أ}}$ ومد حتى لاقى امتداد $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ في س ، ورسم $\overleftrightarrow{\text{م ب}}$

ومد حتى لاقى امتداد $\overleftrightarrow{\text{ء جـ}}$ في ص ، أثبت أن :

أولاً : امتداد $\overline{\text{م ن}}$ ينصف $\overline{\text{جـ ء}}$. ثانياً : $\overline{\text{ء س}}$ = $\overline{\text{جـ ص}}$.

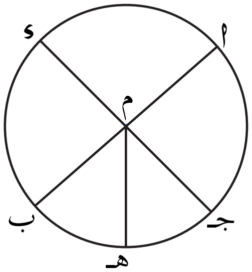
[٦] م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، فإذا كان : نق$_{\text{م}}$ = ٣سم ،

نق$_{\text{ن}}$ = ٤سم ، والبعد المركزى لهما = ٥سم . برهن أن :

أ) $\overline{\text{م أ}}$ مماس للدائرة ن . ب) $\overline{\text{ن أ}}$ مماس للدائرة م .

٥ : ١٠ تمارين ومسائل عامة

[١] حدد في الشكل (٥ – ٩٠)



شكل (٥ – ٩٠)

أ) ثلاثة أنصاف أقطار .

ب) قطرين .

جـ) نصفي دائرة .

ء) أربعة أقواس .

[٢] $\overline{\text{أب}}$ وتر في دائرة طوله ٢٤سم ، وبعده عن المركز ٥سم ، $\overline{\text{جـ ء}}$ وتر آخر في الدائرة بعده عن المركز ١٢سم ، احسب طول $\overline{\text{جـ ء}}$.

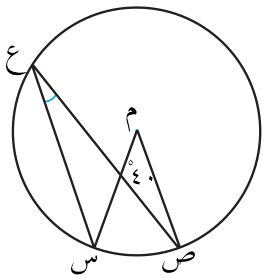
[٣] $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ وتران في الدائرة م ، ق (∡ ب أ جـ) = ٤٥° ، ء ، هـ منتصفا $\overline{\text{أب}}$ ، $\overline{\text{أجـ}}$ على الترتيب . رسم $\overleftrightarrow{\text{ء م}}$ فقطع $\overline{\text{أجـ}}$ في و ، أثبت أن :

| م هـ | = | هـ و | .

[٤] في الشكل (٥ – ٩١) : م مركز الدائرة ، ق (∡ ص م س) = ٤٠°

$\overline{\text{م ص}}$ // $\overline{\text{ع س}}$ ، أوجـــد

ق (∡ ص ع س)، ق (∡ س ص ع)

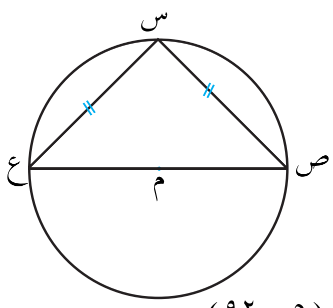


شكل (٥ – ٩١)

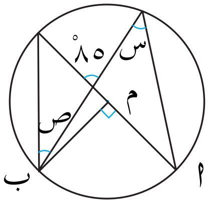
[٥] في الشكل (٥ – ٩٢) : س ص ع مثلث فيه | س ص | = | س ع | .

$\overline{\text{ص ع}}$ قطر الدائرة (م) . أوجد

ق(∡ س ص ع)، ق(∡ س ع ص) .



شكل (٥ – ٩٢)

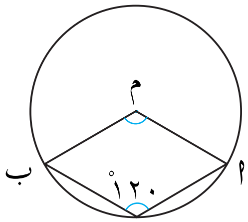


شكل (٥ – ٩٣)

[٦] في الشكل(٥–٩٣) : م مركز الدائرة، ق (∡ أ م ب) = ٩٠ْ . أوجد قيم س ، ص بالدرجات .

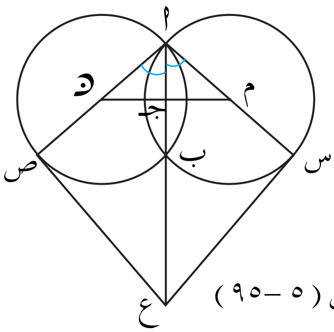
[٧] أثبت أن الزاويتين المتقابلتين في الشكل الرباعي الدائري متكاملتان .

[٨] في الشكل (٥ –٩٤) : م مركز الدائرة ، أوجد ق (∡ أ م ب) .



شكل (٥ –٩٤)

[٩] في الشكل(٥ –٩٥) : م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب . $\overline{\text{أ س}}$ قطر في الدائرة م ، $\overline{\text{أ ص}}$ قطر في الدائرة ن ، مد $\overline{\text{أ ب}}$ على استقامته إلى النقطة ع . فإذا كان : $\overline{\text{ع س}}$ مماساً للدائرة م ، $\overline{\text{ع ص}}$ مماساً للدائرة ن . وإذا كان $\overline{\text{م ن}}$ يقطع $\overline{\text{أ ب}}$ في جـ ، ق (∡ س أ ب) = ق (∡ ص أ ب) ، أثبت أن :



شكل (٥ –٩٥)

أ) الشكل ع س أ ص رباعي دائري . ب) النقاط س ، ب ، ص على استقامة واحدة .

[١٠] أ ب جـ د شكل رباعي مرسوم داخل دائرة ، فإذا كان $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ينصف كلاً من الزاويتين أ ، جـ ، فأثبت أن $\overline{\text{أ جـ}}$ قطر في الدائرة .

[١١] أ ب جـ مثلث مرسوم في دائرة فيه : ق (∡ أ) = ٤٠ْ ، ق (∡ جـ) = ٨٠ْ ، رسم $\overleftrightarrow{\text{س د}}$ مماساً للدائرة ومارا بالنقطة أ بحيث $\overleftarrow{\text{أ س}}$ ، $\overleftarrow{\text{أ د}}$ في جهتين مختلفتين من $\overline{\text{أ جـ}}$ ، عينت النقطة ن على $\overleftarrow{\text{أ س}}$ بحيث | أ ن | = | أ جـ |

المطلوب : أ) أوجد ق (∢ جـ أ د) . ب) برهن أن $\overline{\text{جـ د}}$ مماساً للدائرة .

[١٢] م ، د دائرتان متماستان من الداخل في النقطة أ ، فإذا كان نصف قطر الدائرة م يساوى قطر الدائرة د ، كان $\overline{\text{ب جـ}}$ قطراً في الدائرة (م) ويمس الدائرة د عند م وكان $\overline{\text{أ جـ}}$ يقطع الدائرة د في ء ، أثبت أن :

أ) ق (∢ ب أ جـ) = ٩٠° . ب) $\overline{\text{م أ}}$ ينصف ∢ ب أ جـ .

جـ) ق (∢ أ م ء) = ٤٥° .

[١٣] م ، د دائرتان متماستان من الخارج في أ . رسم $\overleftrightarrow{\text{ب جـ}}$ ماراً بالنقطة أ ويقطع م في ب ، ويقطع د في جـ ،

أثبت أن : القطر $\overline{\text{ب ص}}$ // القطر $\overline{\text{جـ س}}$.

٥ : ١١ اختبـــار الوحـــدة

[١] ضع دائرة حول رقم الإجابة الصحيحة في كل مما يأتي :

أ) تستخدم العلاقة $\frac{\text{طول القوس}}{\text{محيط الدائرة}} = \frac{\text{س}^\circ}{٣٦٠}$ عند حساب :

١) مساحة القطاع الدائري. ٢) طول قوس القطاع الدائري الصغير.

٣) طول قوس القطاع الدائري الكبير .

ب) قياس الزاوية المحيطية يساوي :

١) ضعف قياس قوسها المقطوع . ٢) قياس قوسها المقطوع .

٣) نصف قياس قوسها المقطوع .

جـ) قياس الزاوية المركزية يساوي :

١) ضعف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .

٢) نصف قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .

٣) قياس الزاوية المحيطية المشتركة معها بالقوس .

ء) الزاوية المحيطية المرسومة في نصف دائرة تكون :

١) زاوية منفرجة . ٢) زاوية حادة . ٣) زاوية قائمة .

هـ) الزاوية المركزية المقابلة لقوس = ١٨٠° :

١) زاوية قائمة . ٢) زاوية مستقيمة . ٣) زاوية حادة.

و) الزاويتان المحيطيتان المرسومتان في قوس واحد من الدائرة تكونان :

١) متطابقتان . ٢) متكاملتان . ٣) متتامتان .

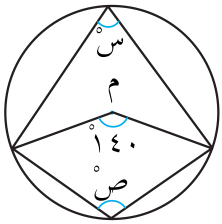
[٢] أ ب وتر في الدائرة م ، نقطة ء منتصف أ ب . ق (∡ أ م ء) = ٢٥° .

أوجد ق (∡ أ م ء) .

[٣] في الشكل (٥ – ٩٦) :

م مركز الدائرة ، أوجد

قيم س ، ص .



شكل (٥ –٩٦)

[٤] أ ب جـ ء شكل رباعي دائري، أ ب قطر في الدائرة . ق (∡ ب أ جـ) = ٣٥°

أوجد ق (∡ أ ء جـ) .

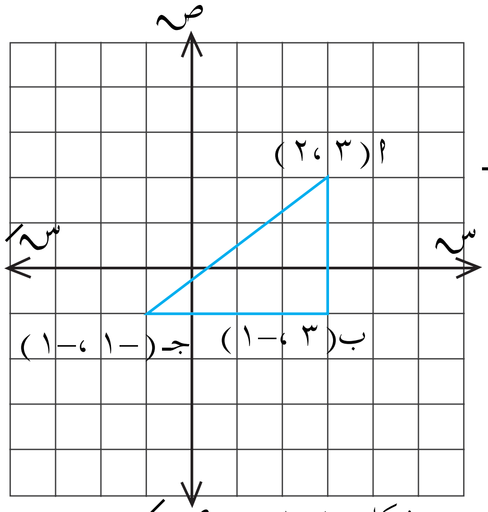
[٥] م ، ن دائرتان متقاطعتان في أ ، ب ، فإذا كانت س نقطة على محيط (م) ، ورسم منها مماس يقطع امتداد ب أ في النقطة ع وكان م ن يقطع أ ب في ء . المطلوب :

أ) أثبت أن الشكل س م ء ع رباعي دائري .

ب) إذا كان ق (∡ أ ب س) = ٣٠° ، فأثبت أن Δ أ م س متساوى الأضلاع .

٦ : ١ البعد بين نقطتين

نشاط (١)



شكل (٦ − ١)

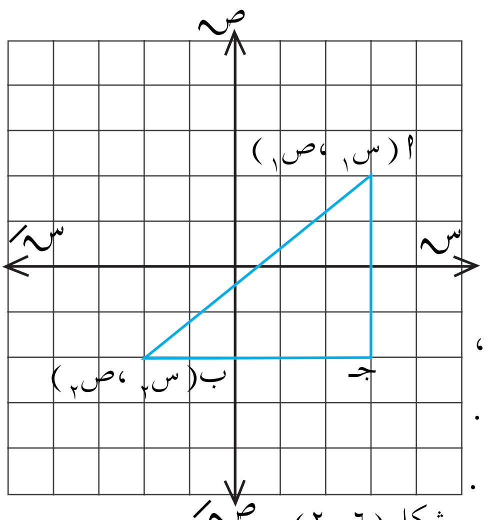
في مستوى إِحداثي، ارسم Δ أ ب جـ حيث أ (٣ ، ٢)، ب (٣ ، −١)، جـ (−١ ، −١) [انظر الشكل (٦ − ١)].

– ما نوع المثلث أ ب جـ؟

– ما طول $\overline{\text{أ ب}}$ ؟ ما طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ؟

– استخدم مبرهنة فيثاغورس لحساب طول $\overline{\text{أ جـ}}$.

نشاط (٢)



شكل (٦ − ٢)

لتكن أ (س١ ، ص١) ، ب (س٢ ، ص٢)، [انظر الشكل (٦ − ٢)]

– ارسم من أ مستقيماً يوازي محور الصادات، ومن ب مستقيماً يوازي محور السينات.

لتكن جـ نقطة تقاطع المستقيمين.

– ما إحداثي النقطة جـ بدلالة إحداثيات أ ، ب ؟

– ما نوع المثلث أ ب جـ ؟

– ما طول $\overline{\text{ب جـ}}$ ؟ وما طول $\overline{\text{أ جـ}}$ ؟

– استخدم مبرهنة فيثاغورس لحساب طول $\overline{\text{أ ب}}$ ،

مما سبق نستنتج أنه :

إذا كان أ $(\text{س}_١ ، \text{ص}_١)$ ، ب $(\text{س}_٢ ، \text{ص}_٢)$ فإن

$$|\text{أ ب}| = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢} .$$

مثال (١)

أوجد البعد بين النقطتين أ ، ب في الحالات الآتية :

١) أ (٥ ، ٢) ، ب (–٢ ، –٢)　　٢) أ (–٣ ، ١)، ب (–٥ ، –٢) .

الحل : [١] البعد بين نقطتين أ، ب =

$$|\text{أ ب}| = \sqrt{(\text{س}_٢ - \text{س}_١)^٢ + (\text{ص}_٢ - \text{ص}_١)^٢}$$

$$= \sqrt{(-٢ - ٥)^٢ + (-٢ - ٢)^٢}$$

$$= \sqrt{(-٧)^٢ + (-٤)^٢} = \sqrt{٤٩ + ١٦} = \sqrt{٦٥}$$ وحدة طولية

٢) $|\text{أ ب}| = \sqrt{[-٥ - (-٣)]^٢ + (-٢ - ١)^٢}$

$$= \sqrt{(-٥ + ٣)^{٢} + (-٣)^{٢}}$$

$$= \sqrt{(-٢)^{٢} + ٩} = \sqrt{٤ + ٩} = \sqrt{١٣} \quad \text{وحدة طولية}$$

مثال (٢)

لتكن أ (٢ ، ٢) ، ب (٥ ، −١) ، جـ (١ ، −٥) . برهن أن Δ أ ب جـ قائم الزاوية .

الحـــل :

$$|\text{أ ب}| = \sqrt{(٥ - ٢)^{٢} + (-١ - ٢)^{٢}} = \sqrt{٣^{٢} + (-٣)^{٢}} = \sqrt{٩ + ٩} = \sqrt{١٨} \quad \text{وحدة طولية،}$$

$$|\text{ب جـ}| = \sqrt{(١ - ٥)^{٢} + [-٥ - (-١)]^{٢}} = \sqrt{(-٤)^{٢} + (-٤)^{٢}} = \sqrt{١٦ + ١٦} = \sqrt{٣٢} \quad \text{وحدة طولية،}$$

$$|\text{أ جـ}| = \sqrt{(١ - ٢)^{٢} + (-٥ - ٢)^{٢}} = \sqrt{(-١)^{٢} + (-٧)^{٢}} = \sqrt{١ + ٤٩} = \sqrt{٥٠} \quad \text{وحدة طولية،}$$

$$\because |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢} = |\sqrt{١٨}|^{٢} + |\sqrt{٣٢}|^{٢} = ١٨ + ٣٢ = ٥٠$$

$$، \quad |\text{أ جـ}|^{٢} = ٥٠$$

$$، \quad |\text{أ ب}|^{٢} + |\text{ب جـ}|^{٢} = |\text{أ جـ}|^{٢}$$

$\therefore \Delta$ أ ب جـ قائم الزاوية في ب .

مثال (٣)

إِذا كانت أ (٥ ، ٣) ، ب (٤ ، −١) ، جـ (−٢ ، −٢) ، ء (−١ ، ٢)، فبرهن أن الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع ، ثم أوجد طول كلٍ من قطريه .

الحل :

$$|أب| = \sqrt{(٤ - ٥)^٢ + (-١ - ٣)^٢} = \sqrt{١ + ١٦} = \sqrt{١٧}$$

$$|ب جـ| = \sqrt{(-٢ - ٤)^٢ + (-٢ + ١)^٢} = \sqrt{٣٦ + ١} = \sqrt{٣٧}$$

$$|جـ ء| = \sqrt{(-١ + ٢)^٢ + (٢ + ٢)^٢} = \sqrt{١ + ١٦} = \sqrt{١٧}$$

$$|ء أ| = \sqrt{(-١ - ٥)^٢ + (٢ - ٣)^٢} = \sqrt{٣٦ + ١} = \sqrt{٣٧}$$

لاحظ أن :

$|أب| = |جـ ء|$ ، $|ب جـ| = |ء أ|$.

∴ الشكل أ ب جـ ء متوازي أضلاع لأن فيه كل ضلعين متقابلين متساويان

.

$$|أجـ| = \sqrt{(-٢ - ٥)^٢ + (-٢ - ٣)^٢} = \sqrt{٤٩ + ٢٥} = \sqrt{٧٤}$$

$$|ب ء| = \sqrt{(-١ - ٤)^٢ + (٢ + ١)^٢} = \sqrt{٢٥ + ٩} = \sqrt{٣٤}$$

تمارين ومسائل

[١] أوجد البعد بين النقطتين في كل زوج مما يلي :

أ) س (٣ ، ٠) ، ص (٤ ، ٤)   ب) س (٢ ، −٤) ، ص (٣ ، ٥)

جـ) س(−٢ ، ٠) ، ص(١ ، ٤)   ء) س(٣ ، −٤) ، ص(٣ ، −٥)

هـ) س(−١ ، −٥) ، ص(٤ ، ٢)   و) س(٤ ، ٧) ، ص(−١ ، −٦)

[٢] إذا كانت ؍ (–٥ ، ٣) ، ب(٣ ، ٣) ، جـ(٣ ، –٣) فبين أن Δ ؍ ب جـ قائم الزاوية ، وحدد رأس الزاوية القائمة .

[٣] إذا كانت ء (–١ ، –١) ، هـ (٣ ، –١) ، و (١ ، ٤) ، فبرهن أن Δ ء هـ و متساوي الساقين .

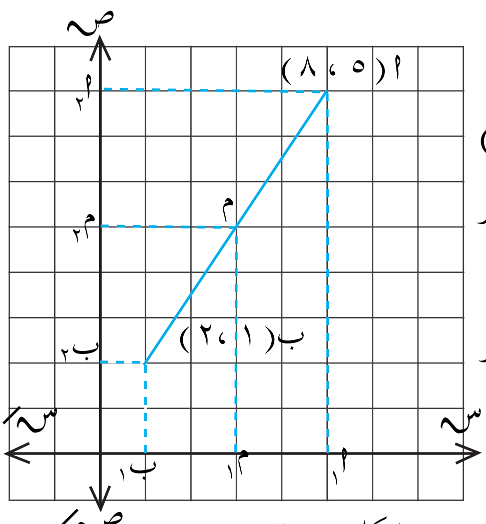
[٤] إذا كانت س (١ ، ٥) ، ﻫ (٦ ، –٢) ، ل (٤ ، –٥) ، ط (–١ ، ٢)، فبرهن أن الشكل س ﻫ ل ط متوازي أضلاع .

[٥] أثبت أن النقاط ؍ (٤ ، ٧) ، ب (٢ ، ٣) ، جـ(٤ ، –١) ، ء(٦ ، ٣) هي رؤوس معين ، احسب مساحته .

[٦] أثبت أن النقاط هـ(١ ،٣)، و (٤ ،–١) ، ل (–٤ ،–٧)، ط(–٧ ، –٣) هي رؤوس مستطيل ، أوجد محيطه ومساحته .

٦ : ٢ احد اثبات منتصف القطعة المستقيمة

نشـــاط (١)



شكل (٦ – ٣)

لتكـن ؍ (٥ ، ٨)، ب (١ ، ٢) نقطتين فـي مستـــوى إحداثي [انظر الشكل (٦–٣)] ،

– اسقط من ؍، ب عمودين على محور السينات يقطعانه في ؍١ ، ب١ .

– لتكن م١ هي منتصـــف $\overline{\text{؍}_1\text{ب}_1}$

ما إحداثي النقطة م١ ؟

– أقم من $م_١$ عموداً على محور السينات، يلاقي $\overline{أب}$ في م . ما الاحداثي النسبي للنقطة م .

– أسقـط من ﺃ ، ب عمودين على محـور الصـادات تقطعـه في النقطتين $ﺃ_٢$ ، $ب_٢$ على التوالي .

– لتكن $م_٢$ نقطة منتصف $\overline{ﺃ_٢ ب_٢}$ ، ما احداثي النقطة $م_٢$.

– اقم من $م_٢$ عمودياً على محور الصادرات يلاقي $\overline{أب}$ في نقطـة **و** .

ما الاحداثي الصادي لنقطة **و** .

– هل تنطبق نقطة م على نقطة **و** ؟ تلاحظ انهما نقطة واحدة .

– ما احداثي النقطة م تلاحظ أن نقطة م منتصف $\overline{أب}$.

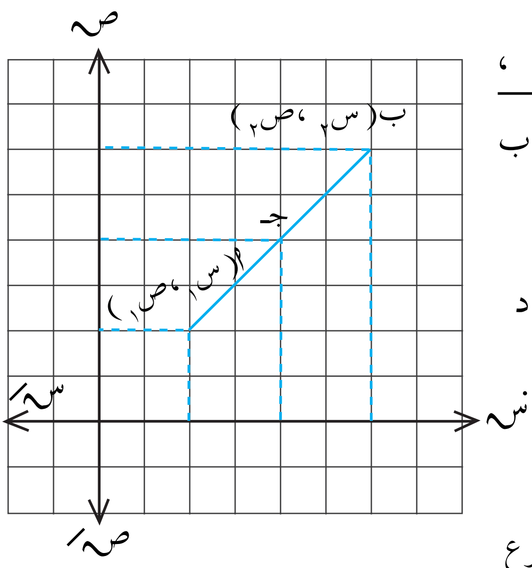
نشـاط (٢)

– اختر نقطتين مثل ﺃ ($س_١$ ، $ص_١$) ، ب ($س_٢$ ، $ص_٢$) ،ثم ارسم أب [انظر الشكل (٦ – ٤)] ،

– باستخدام المسطرة أو الفرجال حدد منتصف $\overline{أب}$ ولتكن النقطة جـ .

– أوجد إِحداثي النقطة جـ .

– قارن إِحداثي النقطة جـ بمجمـوع الإِحـداثيين السينيـين والصـاديين للنقطتين ﺃ ، ب .



شكل (٦ – ٤)

مما سبق نستنتج أن :

إذا كانت ا $($س$_1$ ، ص$_1)$ ، ب $($س$_2$ ، ص$_2)$ ، فإن احداثى منتصف $\overline{\text{ا ب}}$

ولتكن م هي $\left(\dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \text{ ، } \dfrac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$.

مثال (١)

أوجد منتصف $\overline{\text{ا ب}}$ في كلٍ من الحالتين التاليتين :

١) ا (١ ، ٢) ، ب (٦ ، ١٤)   ٢) ا (−٨ ، ٥) ، ب (٤ ، −٣) .

الحـــل :

١) م $\left(\dfrac{\text{س}_1 + \text{س}_2}{2} \text{ ، } \dfrac{\text{ص}_1 + \text{ص}_2}{2} \right)$ = م $\left(\dfrac{1 + 6}{2} \text{ ، } \dfrac{2 + 14}{2} \right)$ = م $\left(\dfrac{7}{2} \text{ ، } \dfrac{16}{2} \right)$

٢) م $\left(\dfrac{-8 + 4}{2} \text{ ، } \dfrac{5 - 3}{2} \right)$ = م $\left(\dfrac{-4}{2} \text{ ، } \dfrac{2}{2} \right)$ = م (−٢ ، ١) .

مثال (٢)

إذا كان ا ب جـ ء متوازي أضلاع ، حيث ا (٥ ، ٥) ، ب (٣ ، ١) ، جـ (−٣ ، −١) ، فأوجد إحداثي النقطة ء .

الحـــل :

لتكن م نقطة تقاطع قطري متوازي الأضلاع ،

∴ م منتصف كلٍ من $\overline{\text{ا جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$.

، ∵ أ (٥ ، ٥) ، جـ (−٣ ، −١)

$$\therefore \text{م} \left(\frac{٥ - ٣}{٢} ، \frac{٥ - ١}{٢} \right) = \text{م} \left(\frac{٢}{٢} ، \frac{٤}{٢} \right) = \text{م} (١ ، ٢)$$

∵ ب (٣ ، ١) ، لتكن ء (س ، ص)

$$\therefore \text{م} \left(\frac{\text{س} + ٣}{٢} ، \frac{\text{ص} + ١}{٢} \right) = \text{م} (١ ، ٢)$$

$\therefore \frac{\text{س} + ٣}{٢} = ١$ ومنها س + ٣ = ٢ ، س = −١

، $\frac{\text{ص} + ١}{٢} = ٢$ ومنها ص + ١ = ٤ ، ص = ٣

فتكون ء (−١ ، ٣) .

تمارين ومسائل

[١] أوجد إِحداثي نقطة منتصف $\overline{\text{س ص}}$ في كلٍ من الحالات الآتية :

أ) س (٤ ، ٥) ، ص (−٢ ، ١)

ب) س (−٥ ، −٣) ، ص (٠ ، −١)

جـ) س (١,٥ ، ٢) ، ص (− ٣,٥ ، −٣)

ء) س (٢,٥ ، ٠,٥) ، ص (−٢ ، −٢,٣) .

[٢] لتكن س (−٢ ، −٤) ، ص (٤ ، ٢) ، ع (٦ ، ٠) ، ولتكن م نقطة منتصف $\overline{\text{س ص}}$ ، د نقطة منتصف $\overline{\text{ص ع}}$، برهن أن $|\text{م د}| = \frac{١}{٢} |\text{س ع}|$.

[٣] أ ب جـ ء مستطيل فيه : أ (٣ ، ٢) ، ب (٣ ، −١) ، جـ(−٢ ، −١)، ء (−٢ ، ٢) ، برهن أن القطرين $\overline{\text{أ جـ}}$ ، $\overline{\text{ب ء}}$ ينصف كلٌ منهما الآخر.

[٤] ٵ ب جـ ء معين فيه : ٵ (٤ ، ٥) ، ب (١ ، ١) ، جـ (–٣ ، –٢) ، ء (٠ ، ٢) ، فإذا كانت هـ ، و ، م ، ن منتصفات $\overline{\text{ٵ ب}}$ ، $\overline{\text{ب جـ}}$ ، $\overline{\text{جـ ء}}$ ، $\overline{\text{ء ٵ}}$ على الترتيب ، فما نوع الشكل هـ و م ن ؟

٦ : ٣ الانعكاس

درست في الصف السابع الانعكاس في أحد المحورين الإحداثيين ،

تذكر أن :

– صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور السينات هي النقطة (س ، – ص)

– صورة النقطة (س ، ص) بالانعكاس في محور الصادات هي النقطة (– س ، ص) .

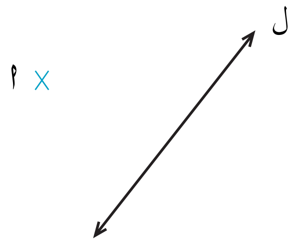
تدريب (١)

أوجد صورة كلٍ من النقاط : ٵ (٢ ، ١) ، ب (–١ ، ١) ، جـ (٠ ، –٤) ، ء (٣ ، ٠) بالانعكاس في محور السينات مرة وفي محور الصادات مرة أخرى .

في هذا البند ستتعرف على الانعكاس في مستقيم (ليس بالضرورة أن يكون هذا المستقيم أحد محوري الإحداثيات) .

نشـــاط (١)

– على ورقة شفافة ، ارسم مستقيم ل ،
– اختر نقطة أ خارجة عن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ [انظر الشكل (٦ – ٥)] .
– اطوِ الورقة حول $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ وعين عليها النقطة المقابلة للنقطة أ ، سمِّها أ_1 .
– افتح الورقة ، وارسم $\overline{\text{أ}\,\text{أ}_1}$.
– حدد نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ مع $\overline{\text{أ}\,\text{أ}_1}$ ، سمِّها د .
– تحقق من أن $\overline{\text{أ}\,\text{أ}_1} \perp \overleftrightarrow{\text{ل}}$ ، وأن $|\text{أ د}| = |\text{أ}_1\text{د}|$.

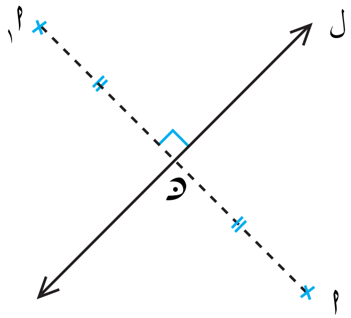


شكل (٦ –٥)

بالنشاط السابق نكون قد حددنا النقطة أ_1 صورة النقطة أ بالانعكاس في المستقيم ل ، يسمى $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ محور الانعكاس .

وبصورة عامة :

لإيجاد صورة النقطة أ بالانعكاس في المستقيم ل ، نرسم من أ قطعة مستقيمة عمودية على المستقيم ل ونمدّها على استقامتها بقدر طولها إلى أ_1 ، فتكون أ_1 صورة أ بالانعكاس في ل ، كما في الشكل (٦ – ٦) :

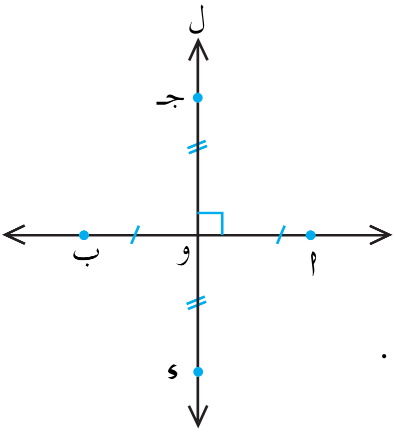


شكل (٦ – ٦)

مما سبق يمكن استنتاج أن :

إذا كان أ$_1$ صورة أ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ ، فإن $\overline{أأ_1} \perp \overleftrightarrow{ل}$ ، | أ د | = | د أ$_1$ |
حيث د هي نقطة تقاطع $\overline{أأ_1}$ مع $\overleftrightarrow{ل}$ والعكس صحيح .

تأمل الشكل (٦ – ٧) ، تلاحظ أن :



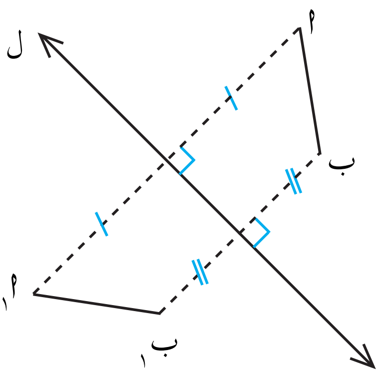
شكل (٦ – ٧)

– صورة أ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي ب .
– صورة أ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{أب}$ هي أ نفسها .
– صورة ب بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي أ .
– صورة جـ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{أب}$ هي ء .
– صورة جـ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي جـ نفسها .
– صورة و بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ هي و نفسها .
– صورة و بالانعكاس في $\overleftrightarrow{أب}$ هي و نفسها .

مما سبق نجد أنه :

إذا كانت النقطة س واقعة على محور الانعكاس ، فإن صورتها هي س نفسها .

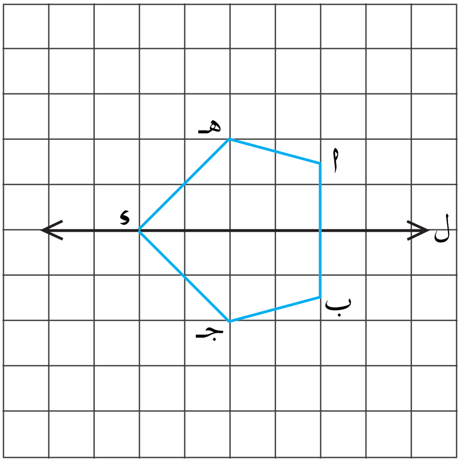
– لإيجاد صورة $\overline{أب}$ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ ، نوجد صورة كلٍ من أ ، ب بهذا الانعكاس ثم نصل بين الصورتين فنحصل على $\overline{أ_1 ب_1}$ ، هي صورة $\overline{أب}$، كما في الشكل(٦–٨) :



شكل (٦ – ٨)

تدريــب (٢)

من الشكل (٦ – ٩) ، أكمل الجــدول التالي ، حيــث $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هــو محور الانعكاس .



شكل (٦ –٩)

الشكل	أ	هـ	أهـ	ء	ءهـ	جـ	جـب
الصورة					ءجـ		هـأ

خواص الإنعكاس :

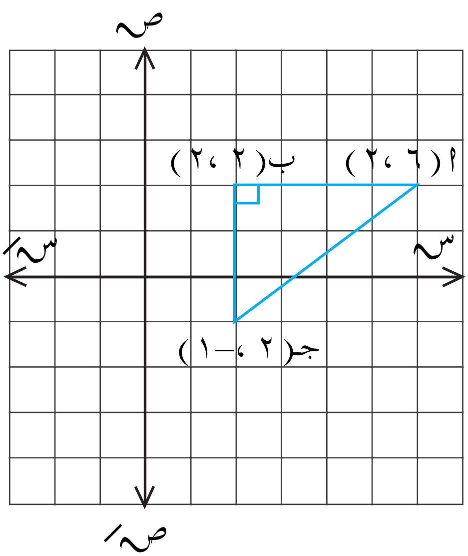
نشـــاط (٢)

علــى الشـــكل (٦ – ١٠) :

أ ب جـ مثلث ، إِحداثيـات رؤوسـه ، هي : (٦ ، ٢)، (٢ ، ٢)، (٢ ،–١) على الترتيب .

– أنقل الشكل على ورقة رسـم بياني ، ثم ارسم صورته بالإنعكاس في محور الصادات ، سمِّها $\text{أ}_١$ $\text{ب}_١$ $\text{جـ}_١$.

– باستخدام قانون البعد بين نقطتين



شكل (٦ – ١٠)

أوجد : | ؏ ب | ، | ب جـ | ، | ؏ جـ | ، | ؏$_1$ ب$_1$ |، | ب$_1$ جـ$_1$ | ، | ؏$_1$ جـ$_1$ |.

– قارن بين طول كل ضلع في Δ ؏ ب جـ وطول صورته في Δ ؏$_1$ ب$_1$ جـ$_1$.

ماذا تستنتج بالنسبة لطول كل ضلع وطول صورته بالانعكاس ؟

– باستخدام المنقلة ، قس زوايا كلٍ من المثلثين ؏ ب جـ ، ؏$_1$ ب$_1$ جـ$_1$.

ماذا تلاحظ بالنسبة لقياس كل زاوية وقياس صورتها بالإنعكاس ؟

من النشاط السابق نستنتج أن :

١ – الانعكاس في محور يحفظ الأطوال .

٢ – الانعكاس في محور يحفظ قياس الزوايا .

مثال (١)

فــي الشــكل (٦ – ١١) :

Δ س$_1$ ص$_1$ ع$_1$ صورة Δ س ص ع بالانعكاس في المحور $\overleftrightarrow{\text{؏ ب}}$.

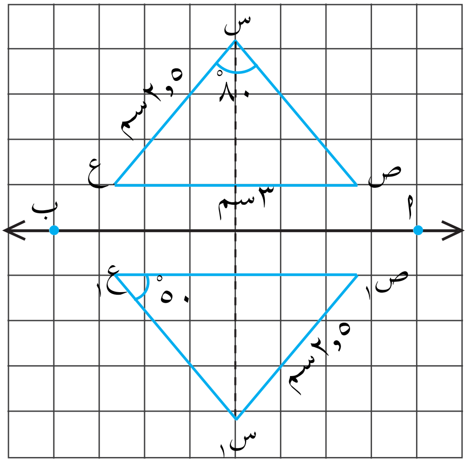
– بالاستعانة بالبيانات الموضحة على الشكل ، وباستخدام خــواص الانعكاس ،

أوجد :

١) قياس كلٍ من :

∡ س$_1$ ، ∡ ص$_1$ ، ∡ ع ، ∡ ص

٢) | س ص |، | ص$_1$ ع$_1$ | ، | س$_1$ ع$_1$ |.



شكل (٦ – ١١)

الحــل :

١) $\because$ Δ س$_١$ ص$_١$ ع$_١$ صورة Δ س ص ع

$\therefore$ ق ($\measuredangle$ س$_١$) = ق ($\measuredangle$ س) = ٨٠°

، ق ($\measuredangle$ ص$_١$) = ١٨٠° – (٥٠° + ٨٠°) = ٥٠° (لماذا؟)

ق ($\measuredangle$ ع) = ق ($\measuredangle$ ع$_١$) = ٥٠°

، ق ($\measuredangle$ ص) = ق ($\measuredangle$ ص$_١$) = ٥٠°

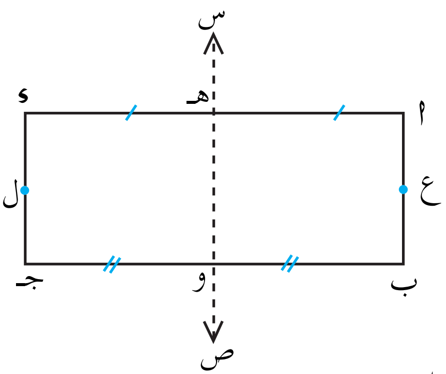
٢) | س ص | = | س$_١$ ص$_١$ | = ٢,٥ سم

| ص$_١$ ع$_١$ | = | ص ع | = ٣ سم .

| س$_١$ ع$_١$ | = ٢,٥ سم (لماذا؟)

التناظر – محور التناظر :

نشــاط (٣)



شكل (٦ – ١٢)

علــى الشـكل (٦ – ١٢) :

أ ب جـ ء مستطيل .

– حدد صور النقاط أ، ع، و ، جـ، ل ، هـ بالإنعكاس في المحور $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$.

– أين تقع صورة كل نقطة بالنسبة للمستطيل (داخله ، خارجه ، عليه) ؟

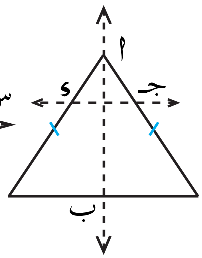
– أختر نقاطاً أخرى من المستطيــل ، تحقق من أن صورها هي نقاط على المستطيل نفسه .

تلاحظ أن صورة كل نقطة من المستطيل بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ هي نقطة على المستطيل نفسه .

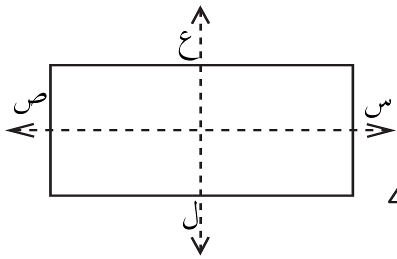
من ذلك نستنتج :

إذا كانت صورة كل نقطة من شكل في المحور $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ هي نقطة على الشكل نفسه ، فإن $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ يسمى محور تناظر ، ونقول أن الشكل متناظر حول هذا المحور.

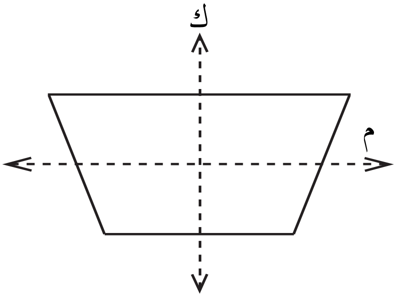
مثال (١) في كل شكل من الأشكال (٦ – ١٣ أ ، ب ، جـ) يوجد محورا إنعكاس حدد أيهما محور تناظر للشكل .



شكل (٦ –١٣أ)



شكل (٦ –١٣ب)



شكل (٦ –١٣جـ)

الحــل :

في الشكل (٦ – ١٣ أ) : $\overleftrightarrow{\text{أ ب}}$ محور تناظر له ، بينما $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ لا يمثل محور تناظر للشكل لأن صورة النقطة أ مثلاً بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{جـ ء}}$ تقع داخل الشكل وليس عليه (تحقق من ذلك) .

– في الشكل (٦ – ١٣ ب) : كل من $\overleftrightarrow{\text{س ص}}$ ، $\overleftrightarrow{\text{ع ل}}$ يمثل محور تناظر للشكل .

– في الشكل (٦ – ١٣ جـ) : $\overleftrightarrow{\text{ك}}$ محور تناظر له ، بينما $\overleftrightarrow{\text{م}}$ ليس كذلك . لماذا ؟

مثال (٣)

أ ب ب$_1$ أ$_1$ شكل رباعي متناظر حول محور الصادات ، إذا كانت أ (٣ ، ٧) ، ب (٧ ، ٣) . عين إحداثي أ$_1$ ، ب$_1$ ثم ارسم الشكل .

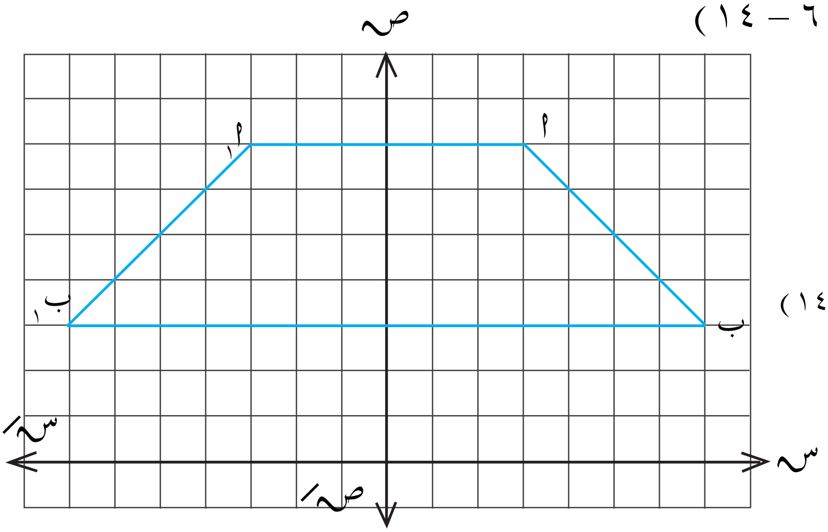
الحل :

حيث أن الشكل أ ب ب$_1$ أ$_1$ متناظر حول محور الصادات ، فإن أ$_1$ ، ب$_1$ هما صورتا أ ، ب بالإنعكاس في محور الصادات .

، ∵ أ (٣ ، ٧) ∴ أ$_1$ (–٣ ، ٧)

، ∵ ب (٧ ، ٣) ∴ ب$_1$ (–٧ ، ٣)

انظر شكل (٦ – ١٤)



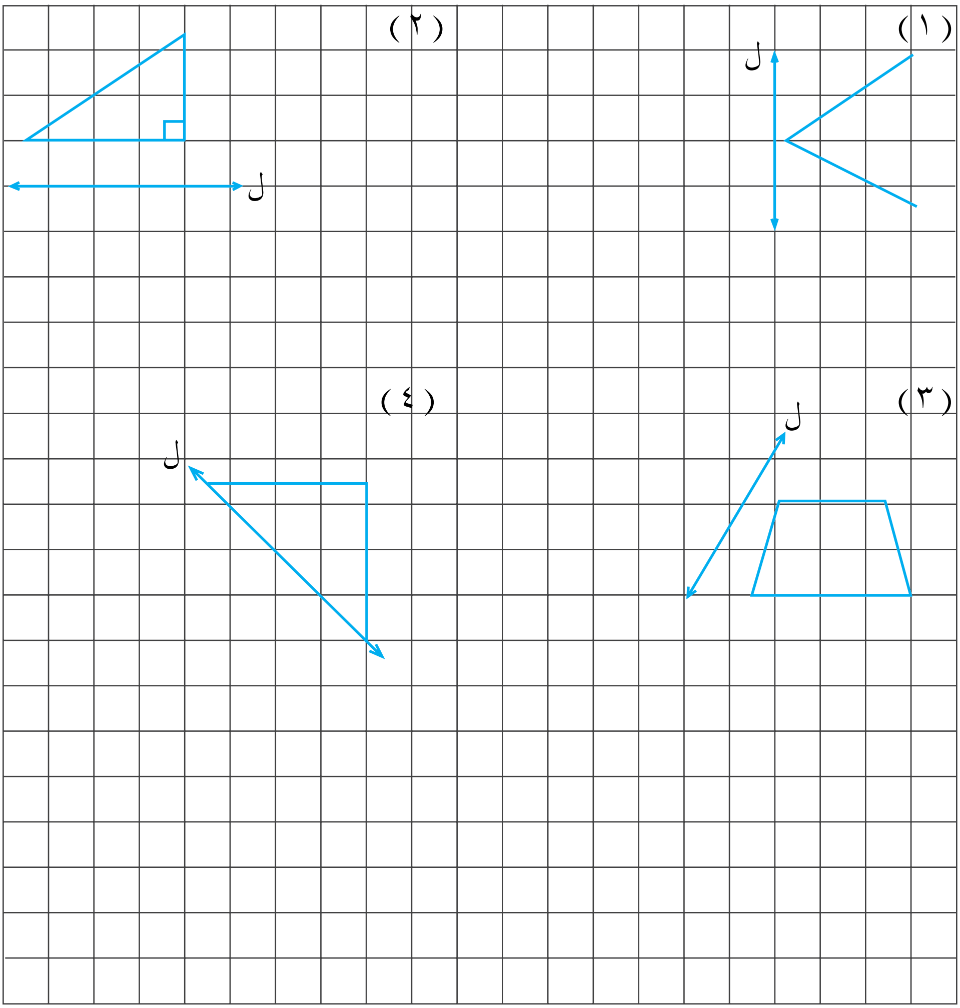
شكل (٦ – ١٤)

تمارين ومسائل

[١] أوجد صورة كلٍ من النقاط التالية : س (١ ، ٣) ، ص (٢ ، −٣) ، ع (−٣ ، −٢) ، ل (٠ ، ٤) ،

أ) بالانعكاس في محور السينات ، ب) بالانعكاس في محور الصادات .

[٢] ارسم صورة كلٍ مما يأتي بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$:



[٣] ارسم صورة المثلث ا ب جـ [شكل (٦–١٥)]

بالإنعكاس في $\overleftrightarrow{ل}$ ، ثم أكمل ما يلي :

١ ▪ صورة ا هي ا نفسها ، صورة ب هي . . .

٢ ▪ صورة جـ هي $جـ_1$، صورة $جـ_1$ هي . . .

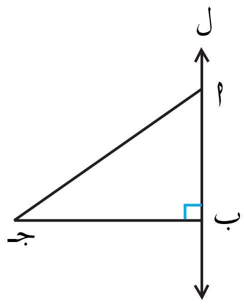
٣ ▪ صورة $\overline{جـ ب}$ هي $\overline{جـ_1 ب}$ ، صورة $\overline{جـ_1 ب}$ هي . . .

٤ ▪ المثلث ا جـ $جـ_1$ متساوي الساقين لأن . . .

٥ ▪ $\overleftrightarrow{ل}$ محور تناظر المثلث . . .

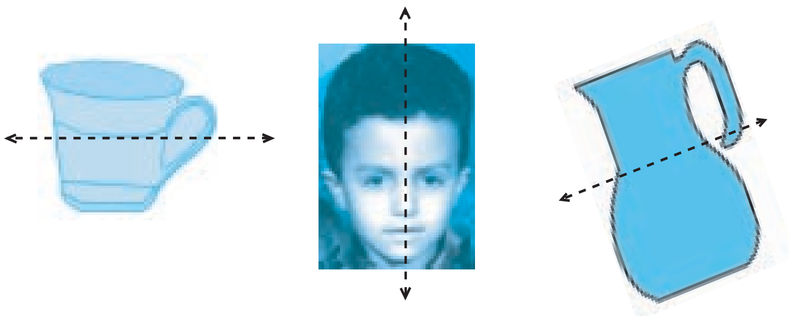
٦ ▪ يسمى الشكل ا جـ $جـ_1$ . . . حول $\overleftrightarrow{ل}$.

٧ ▪ ق ($\measuredangle$ ا ب $جـ_1$) = . . .



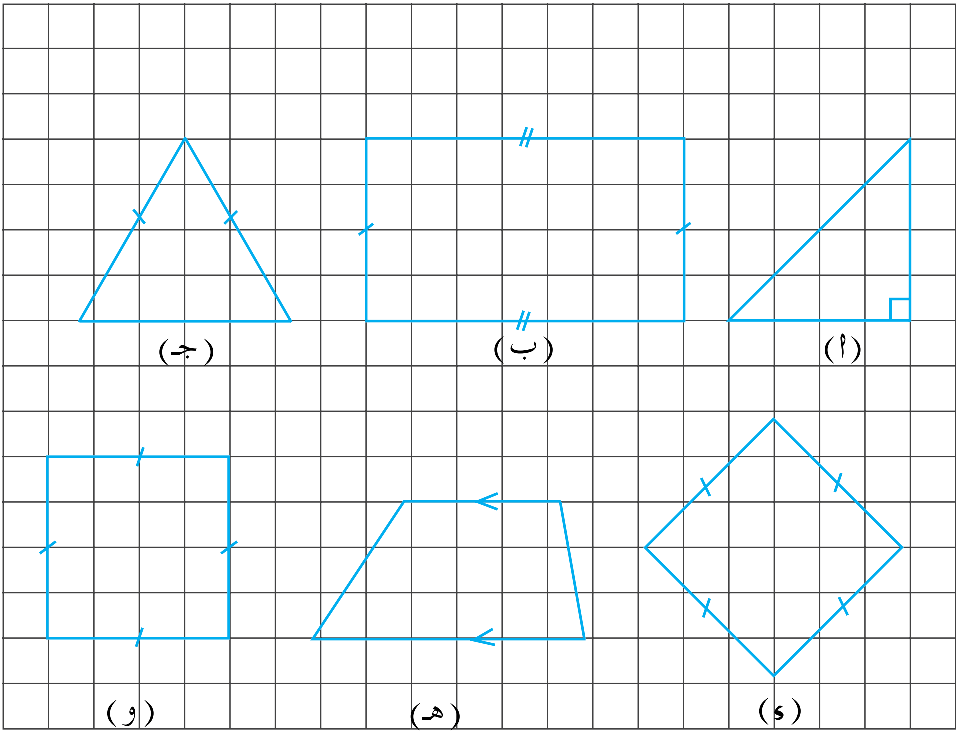
شكل (٦ –١٥)

[٤] فيما يلي :ضع علامة (√) أسفل الشكل المتناظر بالنسبة للمحور المعطى :



شكل (٦ – ١٧)

[٥] تأمل الأشكال التالية ، وعين المتناظر منها ، وارسم محور تناظر له .



[٦] كم محور تناظر لكلٍ من :

أ) المربع   ب) المستطيل   جـ) المثلث المتساوي الساقين   ء) الدائرة .

[٧] ارسم المربع الذي رؤوسه أ (٢ ، ٢) ، ب (٨ ، ٢) ، جـ (٨ ، ٨) ، ء (٢ ، ٨) ثم ارسم صورته بالانعكاس في :

أ) المحور الصادي ص ص′ .

ب) المحور م ن ↔ حيث م (٥ ، ٢) ، ن (٥ ، ٨)

هل المربع أ ب جـ ء متناظر بالنسبة للمحور م ن ↔ ؟ علل إجابتك ؟

٦ : ٤ الانســـــحــــاب

سبق وأن تعرفت على مفهوم الانسحاب .

تذكر أن :

- صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير انسحاب باتجاه محور السينات وبمقدار د من الوحدات هي النقطة (س + د ، ص) .
- صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير انسحاب باتجاه محور الصادات وبمقدار د من الواحدات هي النقطة (س ، ص + د)

ويكون الاتجاه موجباً أو سالباً بالنسبة لأي من المحورين بحسب إشارة د .

تدريـــب أوجد صورة كلٍ من النقاط التالية : (٣ ، ١) ، (–١ ، ١) ، (٤ ، –٢) ، (–٢ ، ٠) ، (٠ ، ٢) ، تحت تأثير انسحاب :

أ) بالاتجاه الموجب لمحور السينات بمقدار وحدتين .

ب) بالاتجاه السالب لمحور الصادات بمقدار ٣ وحدات .

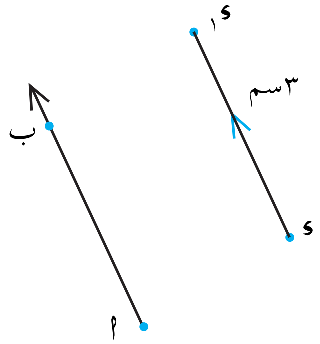
في هذا البند ستتعرف على الانسحاب بشكل عام وفي أي اتجاه كان .

نشـــاط (١)

في الشكل (٦ –١٨): ء $\notin$ $\overleftarrow{\text{أ ب}}$

- ارسم $\overline{\text{ء ء}_1}$ بحيث : $\overline{\text{ء ء}_1}$ // $\overleftarrow{\text{أ ب}}$ ، $|\text{ء ء}_1|$ = ٣سم .

بهذا الإجراء تكون قد عينت ء$_1$ صورة ء ، بانسحاب مقداره ٣سم وباتجاه $\overleftarrow{\text{أ ب}}$.



شكل (٦ – ١٨)

- لتكن هـ نقطة مختلفة عن ء بحيث هـ $\notin$ $\overleftarrow{أ ب}$ ، عين هـ$_١$ صورة هـ بالانسحاب السابق نفسه .

- تحقق من أن $\overline{هـ هـ_١}$ // $\overleftarrow{أ ب}$ ، | هـ هـ$_١$ | = ٣سم ،

من النشاط السابق نستنتج أن :

١ - الانسحاب يتحدد بعنصرين هما : المقدار (المسافة) والاتجاه .

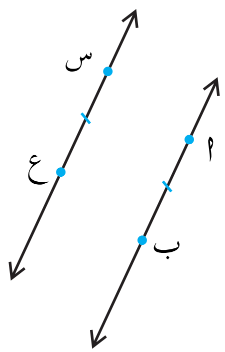
٢ - لأي نقطة س من المستوى ، يمكن تعيين الصورة س$_١$ بانسحاب محدد مقداره واتجاهه .

٣ - تكون النقطة ص$_١$ صورة للنقطة ص بانسحاب مقداره د وحدة طولية واتجاهه $\overleftarrow{أ ب}$.

إذا كان : ١) $\overline{ص ص_١}$ // $\overleftarrow{أ ب}$

٢) | ص ص$_١$ | = د .

مثال (١)



شكل (٦ – ١٩)

في الشكل (٦ – ١٩) : $\overleftrightarrow{س ع}$ // $\overleftrightarrow{أ ب}$ ،

| أ ب | = | س ع | .

أ) أوجد صورة أ بانسحاب مسافته = | س ع | واتجاهه $\overleftarrow{س ع}$.

ب) هل ع صورة س بالانسحاب السابق ؟

جـ) إذا كان | س أ | = | س ع | فهل أ صورة س بالانسحاب السابق نفسه ؟

الحـل :

ا) صورة ا بالانسحاب المعرف سابقاً هي النقطة ب ، لأن $\overleftarrow{\text{ا ب}} \parallel \overleftarrow{\text{س ع}}$ ،

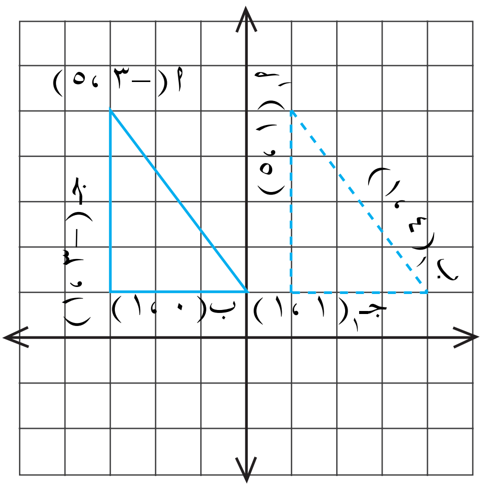
$|\text{ا ب}| = |\text{س ع}|$.

ب) نعم لأن $|\text{س ع}|$ هي نفس مسافة الانسحاب واتجاهه نفس اتجاه الانسحاب .

جـ) لا لأن $\overleftarrow{\text{س ا}} \nparallel \overleftarrow{\text{س ع}}$

خواص الانسحاب :

نشــاط (٢)



شكل (٦ – ٢٠)

فــي الشـكل (٦ – ٢٠) :

ا ب جـ مثلث ، إحداثيـات رؤوسه

(–٣ ، ٥) ، (٠ ، ١) ، (–٣ ، ١)

على التوالي .

– انقل الشكل على ورقة رسم بياني، ثم ارسم صورته بانسحاب مسافته ٤ وحدات وباتجاه محور السينات الموجب، تحصل على الصور ا_1 ، ب_1 ، جـ_1 .

– ما إحداثيات كلٍ من ا_1 ، ب_1 ، جـ_1 ؟

– باستخدام قانون البعد بين نقطتين

أوجد كلاً من $|\text{ا ب}|$ ، $|\text{ب جـ}|$ ، $|\text{ا جـ}|$ ، $|\text{ا}_1\text{ب}_1|$ ، $|\text{ب}_1\text{جـ}_1|$ ، $|\text{ا}_1\text{جـ}_1|$.

–ماذا تلاحظ بالنسبة لأطوال أضلاع المثلث ؛ ب جـ وأطوال أضلاع المثلث $؛_1$ $ب_1$ $جـ_1$ ؟

– استخدم المنقلة لقياس زوايا المثلث ؛ ب جـ ولقياس زوايا المثلث $؛_1$ $ب_1$ $جـ_1$.

– ماذا تلاحظ بالنسبة لقياس كل زاوية في المثلث ؛ ب جـ وقياس صورتها في المثلث $؛_1$ $ب_1$ $جـ_1$ ؟

ستلاحظ أن : ١) طول القطع المستقيمة يبقى ثابتاً بعد الانسحاب .

٢) قياس الزوايا يبقى هو نفسه بعد الانسحاب .

من النشاط السابق نستنتج أن :

١) الانسحاب يحافظ على الأطوال .

٢) الانسحاب يحافظ على قياس الزوايا .

مثال (٢)

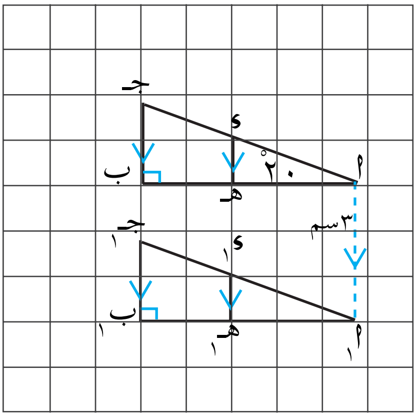
في الشكل (٦ – ٢١) :

Δ $؛_1$ $ب_1$ $جـ_1$ صورة المثلث ؛ ب جـ بانسحاب مقداره ٣ وحدات طولية واتجاهه $\overleftarrow{جـ ب}$.

فإذا كان |؛ جـ| = ٢سم ، $\overline{جـ ب} \perp \overline{؛ ب}$ ،

$\overline{ء هـ} \,//\, \overline{جـ ب}$ ، ق (∢ ؛) = °٢٠ ،

فأجب على ما يلي :



شكل (٦ – ٢١)

١) أوجد |$؛ ؛_1$|

٢) بين أن $\overline{جـ_1 ب_1} \perp \overline{؛_1 ب_1}$

٣) بين أن $\overline{ء_1 هـ_1} \,//\, \overline{جـ_1 ب_1}$

٤) أوجد ق (∢ $جـ_1$) .

الحـــل :

١) ∵ $أ_1$ صورة أ بانسحاب مقداره = ٣ وحدات

∴ $|أ أ_1|$ = ٣ وحدات طولية

٢) ∵ $ب_1$ صورة ب ، ق (∠ ب) = ٩٠° « لأن $\overline{جـ ب} \perp \overline{أ ب}$ »

∴ ق (∠ $ب_1$) = ق (∠ ب) = ٩٠° « خواص الإنسحاب »

٣) ∵ $هـ_1$ صورة هـ .

∴ ق (∠ $هـ_1$) = ق (∠ هـ)

لكن ق (∠ هـ) = ق (∠ ب) « لأن $\overline{ء هـ} // \overline{ب جـ}$ »

∴ ق (∠ $هـ_1$) = ق (∠ ب) = ق (∠ $ب_1$)

∴ $\overline{ء_1 هـ_1} // \overline{ب_1 جـ_1}$.

٤) في Δ أ ب جـ ، ∵ ق (∠ ب) = ٩٠° ، ق (∠ أ) = ٢٠°

∴ ق (∠ جـ) = ٧٠°

لكن ق (∠ $جـ_1$) = ق (∠ جـ) « خواص الانسحاب »

∴ ق (∠ $جـ_1$) = ٧٠° .

مثال (٣)

Δ $س_1 ص_1 ع_1$ صورة المثلث س ص ع بالانعكاس في محور السينات، حيث س (−١ ، ٣)، ص (−١ ، ١)، ع (−٣ ، ١)، فإذا كان Δ $س_2 ص_2 ع_2$ صورة Δ $س_1 ص_1 ع_1$ بانسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات ، فأوجد إحداثيات رؤوس المثلث $س_2 ص_2 ع_2$.

الحــل : نوحد أولاً إحداثيات رؤوس المثلث س$_١$ ص$_١$ ع$_١$ كما يلي :

س (−١ ، ٣) ← س$_١$ (−١ ، −٣)

ص (−١ ، ١) ← ص$_١$ (−١ ، −١)

ع (−٣ ، ١) ← ع$_١$ (−٣ ، −١)

ثم نوجد صور س$_١$ ، ص$_١$ ، ع$_١$ بانسحاب مقداره ٤ وحدات في الاتجاه الموجب لمحور السينات كما يلي :

س$_١$ (−١ ، −٣) ← س$_٢$ (−١ + ٤ ، −٣) = س$_٢$ (٣ ، −٣)

ص$_١$ (−١ ، −١) ← ص$_٢$ (−١ + ٤ ، −١) = ص$_٢$ (٣ ، −١)

ع$_١$ (−٣ ، −١) ← ع$_٢$ (−٣ + ٤ ، −١) = ع$_٢$ (١ ، −١)

تمارين ومسائل

[١] عين العبارات الصحيحة وصوِّب العبارات الخاطئة فيما يلي :

إذا انسحب شكل هندسي في المستوى فإن :

أ) كل نقطة من نقاط الشكل تتحرك نفس المسافة .

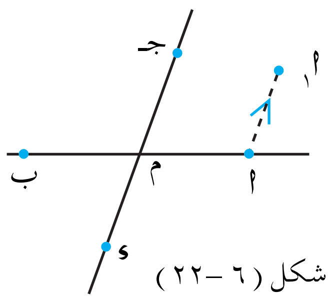
ب) جميع القياسات والمسافات بين أجزاء الشكل تبقى ثابتة .

جـ) هناك دائماً نقطة ثابتة . ء) يتغير اتجاه الشكل .

[٢] في الشكل (٦ − ٢٢) :

أ$_١$ صورة أ بانسحاب مسافته = |م جـ| ، باتجاه $\overleftarrow{\text{م جـ}}$. عيّن :

١) أ$_٢$ صورة أ بانسحاب مسافته |م ء| ، باتجاه $\overleftarrow{\text{م ء}}$.



شكل (٦ − ٢٢)

٢) $ب_١$ صورة ب بانسحاب مسافته = |م جـ| ، باتجاه $\overleftarrow{مء}$.

٣) $ب_٢$ صورة ب بانسحاب مسافته = |م جـ| ، باتجاه $\overleftarrow{مجـ}$.

[٣] أ ، ب نقطتان في المستوى الإحداثي حيث أ(٢ ، ٣) ، ب (١ ، ١)، ح انسحاب ينقل ب إلى $ب_١$ (٤ ، ١) ، حدد عناصر ح (مسافته ، اتجاهه) ثم أوجد إحداثي $أ_١$ صورة أ بهذا الانسحاب .

[٤] أ ب جـ مثلث ، إحداثيات رؤوسه على الترتيب هي : (–١ ، ١) ، (٣ ، –١) ، (١ ، ٤) ، أوجد صورة Δ أ ب جـ تحت تأثير :

١) انعكاس في محور الصادات .

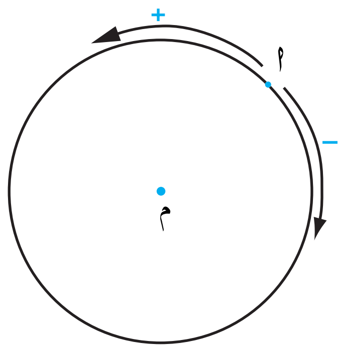
٢) انسحاب مسافته = ٣ وحدات طولية وفي الاتجاه الموجب لمحور السينات .

٦ : ٥ الدوران

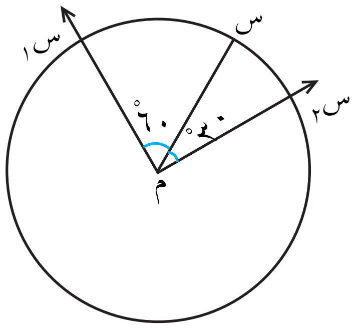
في الشكل (٦ – ٢٣) ، دائرة مركزها م ، أ إحدى نقاطها ، للانتقال على الدائرة انطلاقاً من النقطة أ، يمكنك أن تسلك أحد الاتجاهين :

الأول : اتجاه عقارب الساعة ، ويسمى الاتجاه السالب .

الأخر : عكس اتجاه عقارب الساعة ، يسمى الاتجاه الموجب .



شكل (٦ – ٢٣)



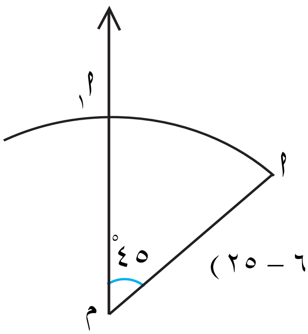
شكل (٦ – ٢٤)

فـي الشكل (٦ – ٢٤) ، س نقطـة على الدائرة (م) .

– حددنا النقطة $س_١$ على الدائرة بحيث يكون الاتجاه من س إلى $س_١$ هو الاتجاه الموجب ، وق (∡ س م $س_١$) = °٦٠ ، نقول أن : $س_١$ صورة س بدوران مركزه (م) ، قياسه (+ °٦٠) ونرمز لهذا الدوران بالرمز ى (م ، + °٦٠) .

– حددنا النقطة $س_٢$ على الدائرة بحيث يكون الاتجاه من س إلى $س_٢$ هو الاتجاه السالب ، وق (∡ س م $س_٢$) = °٣٠ ، لذلك نقول أن : $س_٢$ صورة س بدوران مركزه (م) ، قياسه (– °٣٠) ، ونرمز لهذا الدوران بالرمز ى (م ، – °٣٠) .

نشـــاط (١)



شكل (٦ – ٢٥)

– حدد في مستوى النقطتين م ، أ .

– ارسم $\overline{م أ}$.

– افتـح الفرجـال فتحة بقدر | م أ | .

واركزه على م ، ثم ارسم قوساً من أ بالاتجاه الموجب .

– باستخدام المنقلة ، ارسم زاوية قياسها °٤٥ بحيث $\overleftarrow{م أ}$ احد ضلعيها، ضلعها الأخــر $\overleftarrow{م أ_١}$ (شعاع يبدأ مــن م ويقطع القوس في نقطة $أ_١$)

[انظر الشكل (٦ – ٢٥)] .

– تحقق من أن | م أ | = | م $أ_١$ |

في النشاط السابق تكون قد عينت النقطة $أ_١$ صورة النقطة أ بالدوران (م ، + ٤٥°) .

– اختر نقاطاً أخرى في المستوى وحدد صورها بالدوران السابق نفسه ، تحقق في كل مرة أن البعد بين كل نقطة ومركز الدوران يساوي البعد بين صورة هذه النقطة والمركز نفسه .

من النشاط السابق نستنتج أنه :

١ – يمكن تعيين صورة أي نقطة في المستوى بدوران محدد المركز والقياس.

٢ – تكون النقطة $س_١$ صورة النقطة س بدوران مركزه (م) وقياسه (هـ°)

إذا كان : |م س| = |م $س_١$|، وق (∢ س م $س_١$)= هـ

يكون قياس الدوران موجباً إذا كان الدوران عكس إتجاه عقارب الساعة.

ويكون سالباً إذا كان مع اتجاه عقارب الساعة .

مثال (١)

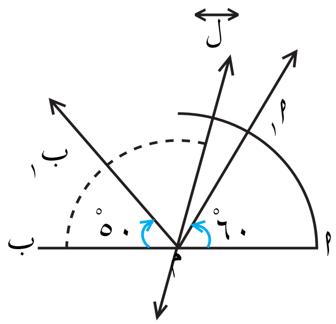
في الشكل (٦ – ٢٦) : $\overline{أ ب}$

تقطع $\overleftrightarrow{ل}$ في النقطة م ، أوجد :

١) صورة أ بالدوران (م ، + ٦٠°)

٢) صورة ب بالدوران (م ، – ٥٠°)

٣) صورة م بكلٍ من الدورانين السابقين.



شكل (٦ – ٢٦)

الحـل :

١) صورة أ بالدوران(م ، +٦٠°) هي $أ_١$ [انظرشكل (٦ – ٢٦)] . لاحظ أن

ق (∢ ا م ا$_1$) = ٦٠ْ ، |م ا| = |م ا$_1$| ، والاتجاه من ا إلى ا$_1$ عكس اتجاه حركة عقارب الساعة (اتجاه موجب) .

٢) بنفس الطريقة السابقة [انظر الشكل (٦ – ٢٦)] حيث ب$_1$ صورة ب بالدوران (م ، – ٥٠ْ) والاتجاه من ب إلى ب$_1$ ، مع اتجاه حركة عقارب الساعة (اتجاه سالب) .

٣) صورة م بكلٍ من الدورانين السابقين هي م نفسها ، لأنها مركز الدوران

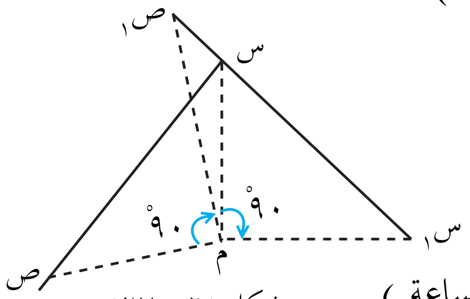
مثال (٢) ارسم صورة $\overline{\text{س ص}}$ تحت تأثير : (١) ء (م ، – ٩٠ْ)

(٢) ء (م ، + ٩٠ْ) .

الحـــل :

[انظر الشكل (٦ – ٢٧)] .

الاتجاه هنا سالب (مع عقارب الساعة) .

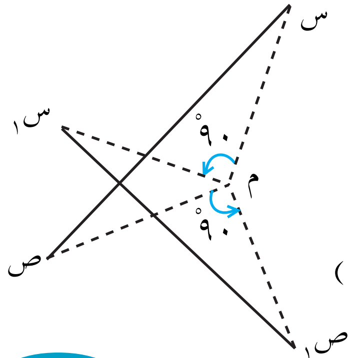


شكل (٦ – ٢٧)

انظر الشكل (٦ – ٢٨) .

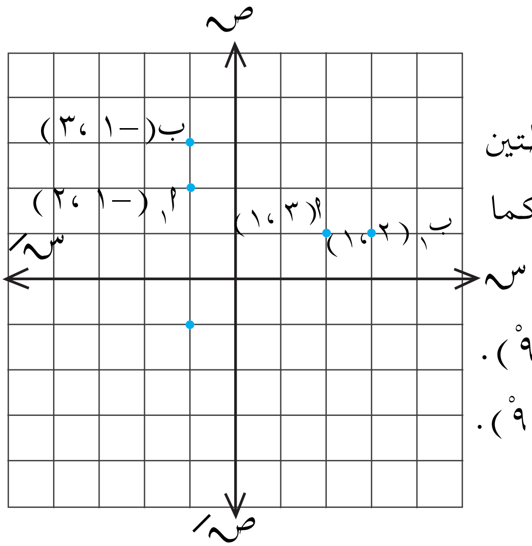
الإتجاه هنا موجب

(عكس عقارب الساعة)



شكل (٦ –٢٨)

نشـــاط (٢)



شكل (٦ – ٢٩)

– على مستوى إحداثي ،حدد النقطتين أ (٢ ، ١) ، ب (–١ ، ٣) كما في الشكل (٦ – ٢٩) .

– عين أ$_1$ صورة أ بالدوران(م ، +٩٠°) .

– عين ب$_1$ صورة ب بالدوران(م ، –٩٠°) .

– ما إحداثي أ$_1$ ؟قارن بإحداثي أ .

– ما إحداثي ب$_1$ ؟ قارن بإحداثي ب .

– تلاحظ أن أ$_1$ (–١ ، ٢) ، ب$_1$ (٣ ، ١) .

– اختر نقاطاً أخرى في المستـــوى ، عين صورها بالدوران (م ، +٩٠°) مـــرة وبالدوران (م ، –٩٠°) مرة أخرى ، قارن بين إحداثي كل نقطة وإحداثي صورتها ، ماذا تلاحظ ؟

من النشاط السابق نستنتج أنه :

لأي نقطة (س ، ص) في المستوى الإحداثي :

أ) صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير د(و ، + ٩٠°) هي النقطة (– ص ، س) .

ب) صورة النقطة (س ، ص) تحت تأثير د(و ، – ٩٠°) هي النقطة (ص ، –س) .

و هي نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

مثال (٣) أوجد صورة كل نقطة من النقاط الآتية :

أ (٣ ، ٠)، ب (٣ ، ٢) ، جـ (٠ ، ٢) ، ء (٠ ، ٠)، هـ (−٢ ، −١)

تحت تأثير : ١) ء (و ، +٩٠°) ٢) ء (و ، −٩٠°) حيث و نقطة الأصل.

الحـــل :

١) أ١ (٠ ، ٣) ، ب١ (−٢ ، ٣) ، جـ١ (−٢ ، ٠) ، ء١ (٠ ، ٠) ، هـ١ (١ ، −٢) .

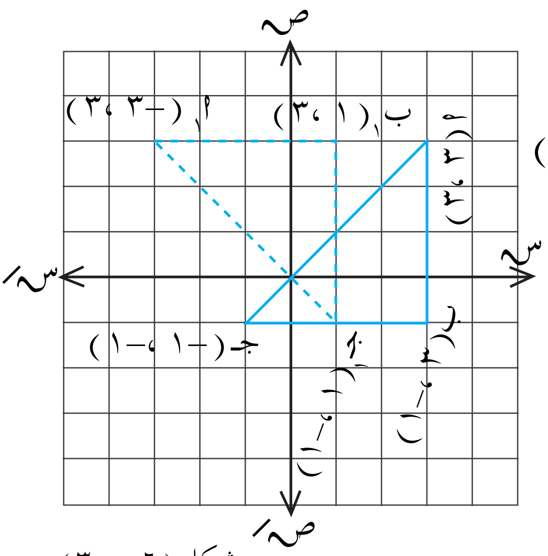
٢) أ١ (٠ ، −٣) ، ب١ (٢ ، −٣) ، جـ١ (٢ ، ٠) ، ء١ (٠ ، ٠) ، هـ١ (−١ ، ٢) .

خواص الدوران :

نشـــاط (٣)

١) على مستوى إحداثي ، ارسم المثلث أ ب جـ حيث أ (٣ ، ٣) ب (٣ ، −١)، جـ (−١ ، −١) كما في الشكل (٦ − ٣٠) .

٢) أوجد صورة Δ أ ب جـ بالدوران (و ، +٩٠°)، سمِّ المثلث الناتج أ١ ب١ جـ١



شكل (٦ − ٣٠)

٣) باستخدام قانون البعد بين نقطتين أوجد كلاً من |أ ب|، |ب جـ|، |أ جـ|، |أ$_١$ ب$_١$|، |ب$_١$ جـ$_١$|، |أ$_١$ جـ$_١$| .

٤) قارن بين أطوال أضلاع المثلث أ ب جـ ونظائرها في المثلث أ$_١$ ب$_١$ جـ$_١$.

٥) باستخدام المنقلة أوجد قياس كلٍ من ∡ أ ، ∡ ب ، ∡ جـ ، ∡ أ$_١$ ، ∡ ب$_١$ ، ∡ جـ$_١$.

٦) قارن بين قياسات زوايا المثلث أ ب جـ ونظائرها في المثلث أ$_١$ ب$_١$ جـ$_١$.

من النشاط السابق نستنتج أن :

١) الدوران يحافظ على الأطوال

٢) الدوران يحافظ على قياس الزوايا .

تماريـن ومسائـل

[١] فسرِّ معنى كلٍ مما يأتي :

١) ى (م ، + ٣٠°) ٢) ى (و ، + ٩٠°) ٣) ى (و ، – ٩٠°) .

[٢]أوجد صور كلٍ من النقاط الآتية : أ (٠ ، –٢)، ب (٥ ، ٠)، جـ (–٣ ، ٢)

تحت تأثير كل من : ١) ى (و ، + ٩٠°) ٢) ى (و ، – ٩٠°) .

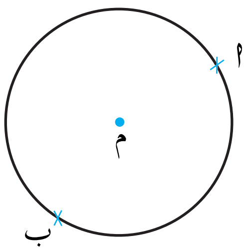
[٣] فـي الشكل (٦ – ٣١) : دائـرة

مركزها (م) ، أ ، ب نقطتان عليها،

حدد النقطتين أ$_١$ ، ب$_١$ بحيث :

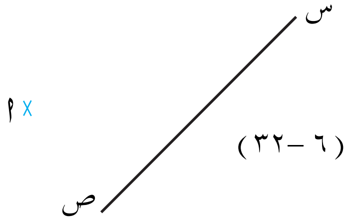
١) أ$_١$ صورة أ بالدوران (م ، ٧٠°)

٢)ب$_١$ صورة ب بالدوران (م ، –٣٠°) .



شكل (٦ – ٣١)

[٤] أنقل الشكل (٦ – ٣٢) :
ثم ارسم صورة $\overline{\text{س ص}}$ بالدوران (ا ، – ٩٠°) .



شكل (٦ – ٣٢)

[٥] في مستوى إحداثي، ارسم Δ ا ب جـ ، حيث ا (٢ ، ٣) ، ب (٣ ، ١)، جـ (١ ، ١) ، ثم ارسم صورته بالدوران (و ، + ٩٠°) .

[٦] إذا كانت $ا_١$ صورة النقطة ا بالدوران (م ، – ٤٥°) ، فما الدوران الذي يجعل النقطة ا صورة للنقطة $ا_١$ ؟

٦ : ٦ التكبيـــر

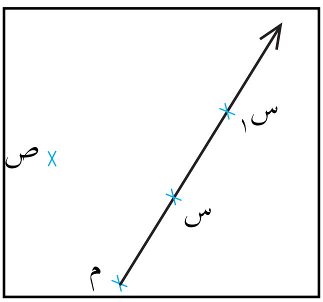
تمهيد :

تذكر أن كلاً من الانعكاس والانسحاب والدوران يحول كل نقطة في المستوى إلى نقطة أخرى في المستوى نفسه ، لذلك نسمي كل منها تحويلاً هندسياً ، وتذكر أيضاً أن التحويلات سابقة الذكر تحفظ قياس الأطوال ، لذلك تسمى تحويلات متقايسه .

في هذا البند ستتعرف على تحويل هندسي رابع يسمى التكبير ، وهو تحويل لايحفظ الأطوال .

نشــاط (١)

في الشكل(٦–٣٣) : س ، ص ، م ثلاث نقاط في المستوى .



شكل (٦ – ٣٣)

– ارسم $\overleftarrow{\text{م س}}$ ، وحدد عليه $س_1$ بحيث $\frac{|م\, س_1|}{|م\, س|} = \frac{2}{1}$ ،

بهذا الاجراء تكون قد حددت النقطة $س_1$ صورة النقطة س بتكبير مركزه م ونسبته ٢ ، تسمى هذه النسبة معامل التكبير .

– لتكن $ص_1$ صورة ص بتكبير مركزه م ، ونسبته ٢ .

– ما الشروط التي يجب أن تحفظ لهذا التكبير ؟

الشروط : ١) أن تقع $ص_1$ على $\overleftarrow{\text{م ص}}$.

٢) $\frac{|م\, ص_1|}{|م\, ص|} = 2$.

– اختر نقاطاً أخرى في المستوى ، وحدد صورها بالتكبير السابق نفســـه ماذا تلاحظ ؟

من النشاط السابق نستنتج أنه :

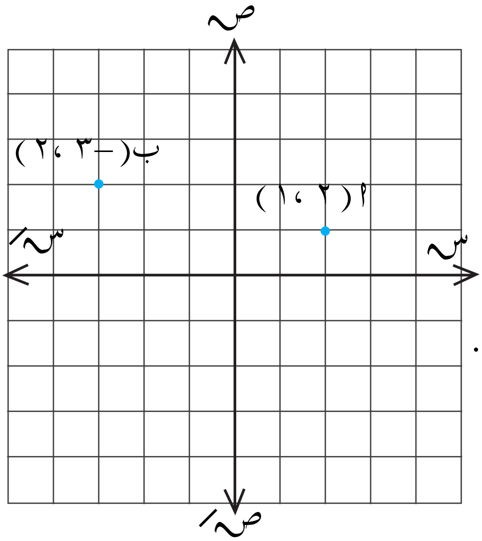
– لأي نقطة س في المستوى يمكن تعيين $س_1$ صورة س بتكبير محدد المركز والمعامل .

– تكون النقطة $س_1$ صورة النقطة س بتكبير مركزه م ومعامله د ، إذا كان :

١) $س_1 \in \overleftarrow{\text{م س}}$ ($س_1$ تقع على $\overleftarrow{\text{م س}}$) .

٢) $\frac{|م\, س_1|}{|م\, س|} = د$.

نشـــاط (٢)



شكل (٦ –٣٤)

على مستوى إحداثي،حدد النقطة أ(٢ ، ١) كما في الشكل (٦– ٣٤)

– حدد النقطة $أ_١$ صورة أ بتكبير مركزه و [نقطة الأصل(٠ ، ٠)] ومعامله ٣ .

– ما إحداثي النقطة $أ_١$ ؟

– إذا كانت ب (–٣، ٢)، فما إحداثي صورتها $ب_١$ بالتكبير السابق نفسه ؟

– ما نسبة إحداثي كل صورة إلى إحداثي النقطة نفسها ؟

– قارن تلك النسب بمعامل التكبير ، ماذا تلاحظ ؟

تلاحظ أن :

$$\frac{\text{الإحداثي السيني لـ } أ_١}{\text{الإحداثي السيني لـ } أ} = \frac{\text{الإحداثي السيني لـ } ب_١}{\text{الإحداثي السيني لـ } ب} = ٣ = \text{معامل التكبير ،}$$

$$\frac{\text{الإحداثي الصادي لـ } أ_١}{\text{الإحداثي الصادي لـ } أ} = \frac{\text{الإحداثي الصادي لـ } ب_١}{\text{الإحداثي الصادي لـ } ب} = ٣ = \text{معامل التكبير}$$

من النشاط السابق نستنتج أن :

صورة النقطة (س ، ص) بتكبير مركزه نقطة الأصل و (٠ ، ٠) ومعامله ﻫ هي (ﻫ س ، ﻫ ص) .

سنرمـز للتكبيـــر الذي مركـزه م ومعامله ﻫ بالرمز ت (م ، ﻫ)

وحيث أن التكبير : ت (م ، ك) ينقل النقطة (س ، ص) إلى النقطة (ك س ، ك ص) فإننا نعبر عن ذلك رمزياً كما يلي :

ت : (س ، ص) ← (ك س ، ك ص) .

مثال (١) عين صورة كل نقطة مما يأتي بالتكبير [(٠ ، ٠) ، ٢] أي :

ت : (س ، ص) ← (٢س ، ٢ص) .

أ) (−٣ ، ٣) ، ب) (٢ ، −٤) ،

جـ) ($-\frac{1}{2}$ ٢ ، $-\frac{1}{2}$ ١) ، ء) (٠ ، ٠) .

الحـــل :

أ) (−٣ ، ٣) ← (٢ × −٣ ، ٢ × ٣) = (−٦ ، ٦) .

ب) (٢ ، −٤) ← (٢ × ٢ ، ٢ × −٤) = (٤ ، −٨) .

جـ) ($-\frac{1}{2}$ ٢ ، $-\frac{1}{2}$ ١) ← (٢ × $\frac{-5}{2}$ ، ٢ × $\frac{-3}{2}$) = (−٥ ، −٣) .

ء) (٠ ، ٠) ← (٢ × ٠ ، ٢ × ٠) = (٠ ، ٠) .

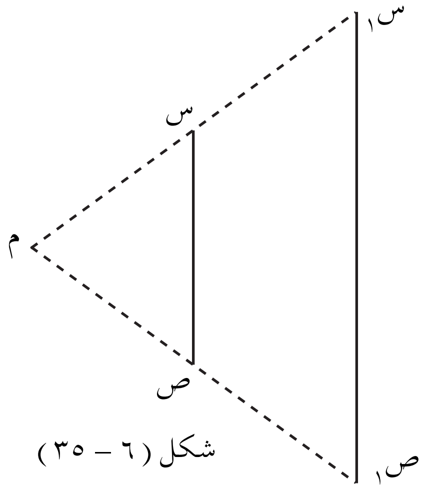
تلاحظ من المثال السابق الفقرة(ء)أن صورة النقطة (٠ ، ٠) هي(٠ ، ٠) نفسها ذلك لأن النقطة (٠ ، ٠) هي مركز التكبير . وبصورة عامة ، لأي تكبير ت (م ، أ) يكون : ت : م ← م أي أن صورة مركز التكبير هي النقطة نفسها .

مثال (٢)

ارسم صورة $\overline{\text{س ص}}$ بالتكبير :

أ) ت (م ، ٢) .   ب) ت (م ، $\frac{١}{٢}$)   حيث م $\notin$ $\overline{\text{س ص}}$.

الحل :

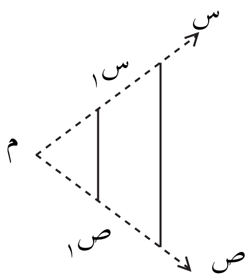


شكل (٦ – ٣٥)

أ) نحدد س$_١$ صورة س بالتكبير (م ، ٢) ، ثم ص$_١$ صورة ص بالتكبير نفسه ، نرسم $\overline{\text{س}_١\text{ص}_١}$ وهي صورة $\overline{\text{س ص}}$ بالتكبير (م ، ٢) [انظر الشكل (٦ – ٣٥)] .

ب) نحدد س$_١$ صورة س بالتكبير (م ، $\frac{١}{٢}$) باتباع ما يلي :

نرسم $\overleftarrow{\text{م س}}$ ثم نحدد عليه نقطة س$_١$ بحيث يكون $\frac{|\text{م س}_١|}{|\text{م س}|} = \frac{١}{٢}$ (معامل التكبير)، فتكون س$_١$ صورة س بالتكبير (م ، $\frac{١}{٢}$) ،



شكل (٦ – ٣٦)

– بنفس الطريقة نعين ص$_١$ صورة ص بالتكبير (م ، $\frac{١}{٢}$) ،

– نرسم $\overline{\text{س}_١\text{ص}_١}$ وهي صورة $\overline{\text{س ص}}$ بالتكبير (م ، $\frac{١}{٢}$) ،

لاحظ في الشكل (٦ – ٣٥) أن |س$_١$ص$_١$| > |س ص| ، وهي حالة تكبير
أما في الشكل(٦ –٣٦)فتلاحظ أن |س$_١$ص$_١$| < |س ص| ، وهي حالة تصغير،
وبصورة عامة يحدث التصغير عندما تكون ٠ < ﻫ < ١ ،
أي عندما يكون معامل التكبير أكبر من الصفر وأقل من الواحد .

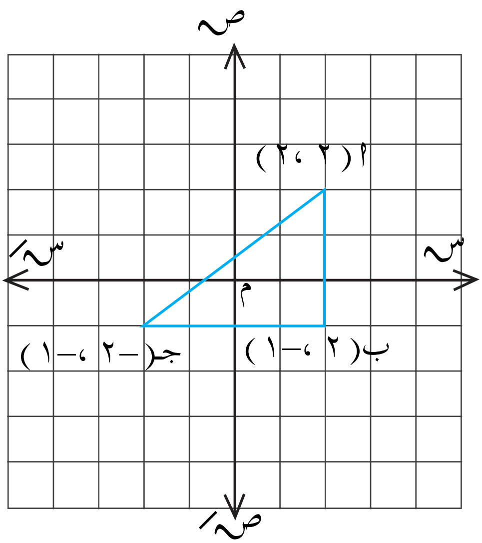
خواص التكبير :

نشـــاط (٣)

على الشكل (٦ –٣٧) : ﺃ ب جـ مثلث، إحداثيات رؤوسه،كما في الرسم،

– أنقـــل الشـــكل إلـــى ورقـــة رسـم بياني .

– أرسم المثلث ﺃ$_١$ ب$_١$ جـ$_١$ ، صورة المثلث ﺃ ب جـ بتكـبير مركـزه نقطة الأصـــل ومعامله ٣ .



شكل (٦ – ٣٧)

– ما إحداثيات النقاط ﺃ$_١$ ، ب$_١$ ، جـ$_١$.

– باستخدام قانون البعد بين نقطتين ، أوجد أطوال أضـــلاع Δ Δ ﺃ ب جـ ، ﺃ$_١$ ب$_١$ جـ$_١$ ، ثم قارن بينها ، ماذا تلاحظ ؟

لابد أنك لاحظت أن $\frac{|ﺃ_١ ب_١|}{|ﺃ \ ب|} = \frac{|ب_١ جـ_١|}{|ب \ جـ|} = \frac{|ﺃ_١ جـ_١|}{|ﺃ \ جـ|} = ٣$

– باستخدام المنقلة أوجد قياس زوايا Δ Δ ﺃ ب جـ ، ﺃ$_١$ ب$_١$ جـ$_١$ ، ثم قارن بين

قياس كل زاوية من Δ أ ب جـ وقياس الزاوية المناظرة لها (صورتها) من المثلث $أ_1$ $ب_1$ $جـ_1$ ، ماذا تلاحظ ؟

في Δ أ ب جـ . تلاحظ أن $\overline{أب} \perp \overline{بجـ}$ ، لماذا ؟

– هل $\overline{أ_1 ب_1} \perp \overline{ب_1 جـ_1}$ ؟ لماذا ؟

من النشاط السابق نستنتج أن :

١ – التكبير يكبر أبعاد الأضلاع أو يصغرها بنسبة معينة هي معامل التكبير

٢ – التكبير يحفظ قياس الزوايا .

مثال (٣)

إِذا كانت $\overline{س_1 ص_1}$ هي صورة $\overline{س ص}$ بتكبير ت (م ، ﻙ) ، فأوجد معامل التكبير (ﻙ) في كلٍ من الحالات الآتية :

١) |م س| = ٤سم ، |م $س_1$| = ١٢سم

٢) |م س| = ٨سم ، |م $س_1$| = ٤ سم

٣) |س ص| = ٤سم ، |$س_1$ $ص_1$| = ٢٤سم

الحـــل :

١) حيث أن $س_1$ صورة س بالتكبير (م ، ﻙ) ، فإن :

$$ﻙ = \frac{|م\ س_1|}{|م\ س|}$$ (شروط التكبير) ،

، $\because$ |م س| = ٤سم ، |م $س_1$| = ١٢سم

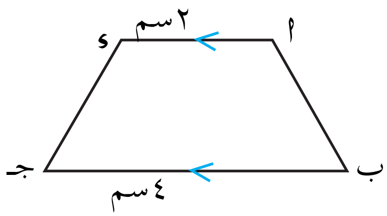
$\therefore$ ﻙ $= \frac{١٢}{٤} = ٣$

٢) بنفس الاسلوب في (١) نجد أن : $د = \frac{٤}{٨} = \frac{١}{٢}$

٣) من خواص التكبير نجد أن :

$$د = \frac{|س_١ ص_١|}{|س ص|} \qquad \therefore د = \frac{٢٤}{٤} = ٦ .$$

مثال (٤) في الشكل (٦ –٣٨) : ا ب جـ ء شبه منحرف ، فيه $\overline{اء} \parallel \overline{ب جـ}$ ، |ا ء| = ٢سم ، |ب جـ| = ٤سم ، فإذا كانت $\overline{ب جـ}$ صورة $\overline{اء}$ بتكبير(م ، د) ، فأوجد معامل التكبير(د)،وعيّن مركز التكبير(م) .



شكل (٦ – ٣٨)

الحـــل :

$\because$ $\overline{ب جـ}$ صورة $\overline{اء}$ بالتكبير (م ، د)

$$\therefore د = \frac{|ب جـ|}{|ا ء|} = \frac{٤}{٢} = ٢$$

ومركز التكبير (م) هي نقطة تقاطع $\overleftarrow{ب ا}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، لماذا ؟

تدريـــب

في الشكل (٦ – ٣٨) : ارسم $\overleftarrow{ب ا}$ ، $\overleftarrow{جـ ء}$ ، حدد نقطة تقاطعهما (م)،

ثم تحقق ان $\frac{|م ب|}{|م ا|} = \frac{|م جـ|}{|م ء|} = ٢$سم .

تمارين ومسائل

[١] عيّن صورة كلٍ من النقاط التالية : (٣ ، ٣) ، (–٦ ، ٠) ، (–١٢ ، ٣)

تحت تأثير كلٍ من : ١) ت (و ، ٤) ٢) ت (و ، $\frac{٢}{٣}$) .

[٢] التكبير ت(و، د) مركزه نقطة الأصل و(٠ ، ٠) ومعامله د ، إذا كان :

ت (و ، د) : أ ⟵ أ$_١$ فأوجد معامل التكبير في كلٍ من الحالات الآتية :

١) أ (٣ ، ٢) ⟵ أ$_١$ (١٢ ، ٨)

٢) أ (٠ ، ٥) ⟵ أ$_١$ (٠ ، ١٠)

٣) أ (٤ ، ٨) ⟵ أ$_١$ (١ ، ٢)

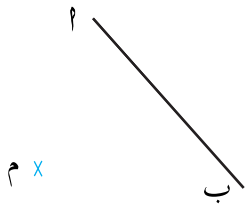
٤) أ (٦ ، ٩) ⟵ أ$_١$ (٩ ، ١٣,٥) .

[٣] إنقل الشكل (٦ – ٣٩) إلى دفترك، ثم ارسم :

١) صورة أ بالتكبير (م ، ٣) .

٢) صورة ب بالتكبير نفسه .

٣) صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالتكبير نفسه .



شكل (٦ – ٣٩)

[٤] ارسم صورة Δ أ ب جـ الذي رؤوسه أ (٢ ، ١) ، ب (٠ ، ١) ، جـ(–٢ ، –١) بالتكبير (و ، ٢)، حيث و هي نقطة الأصل (٠ ، ٠) .

[٥] بين أن Δ Δ أ ب جـ ، أ$_١$ ب$_١$ جـ$_١$ الموضحة بياناتهما في التمريـن [٤] متشابها (تذكر أنه : يتشابه المثلثان إذا تناسبت أضلاعهما المتناظرة) .

٦ : ٧ تمارين عامة ومسائل

[١] أوجد | س ص | في كلٍ مما يلي :

أ) س (٣ ، ٥) ، ص (−٢ ، ٨)

ب) س (٠ ، ٢) ، ص (−٥ ، ٣)

جـ) س (−١ ، −٢) ، ص (−٤ ، ٥)

[٢] أوجد إِحداثيات نقطة منتصف س ص في كلٍ مما يلي :

أ) س (١ ، ٣) ، ص (−٣ ، ١)

ب) س (٣,٥ ، ٢) ، ص (−١,٥ ، ٠)

جـ) س (−١ ، ٠,٥) ، ص (٠,٤ ، ١,٧)

[٣] حدد نوع التحويل الهندسي الذي يجعل $ع_١$ صورة ع ، كما في مثال الفقرة (أ) في كلٍ مما يلي :

أ) ع (س ، ص) ⟵ $ع_١$ (٢س، ٢ص) تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٢،

ب) ع (س ، ص) ⟵ $ع_١$ (س ، −ص)

جـ) ع (س ، ص) ⟵ $ع_١$ (−ص ، س)

ء) ع (س ، ص) ⟵ $ع_١$ (س − ١ ، ص)

هـ) ع (س ، ص) ⟵ $ع_١$ ($\frac{١}{٢}$ س ، $\frac{١}{٢}$ ص)

و) ع (س ، ص) ⟵ $ع_١$ (س ، ص + ٣)

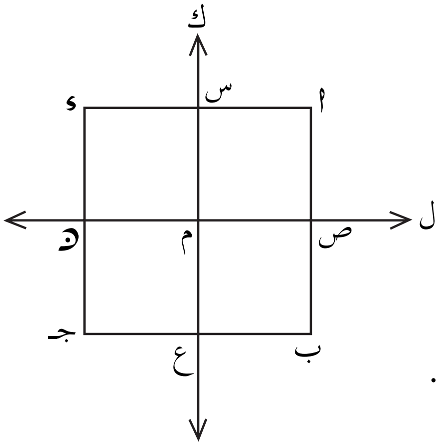
[٤] عين صورة كل نقطة من النقاط : س (٠ ، −٣) ، ص ($\frac{١}{٢}$ ٢ ، −$\frac{١}{٢}$ ١)، ع ($\frac{٣}{٢}$ ، −٢) تحت تأثير كلٍ من :

أ) انعكاس في المحور السيني .

ب) انسحاب في الاتجاه الموجب للمحور الصادي بمقدار ٣ وحدات.

جـ) دوران مركزه نقطة الأصل و (٠ ، ٠) ، وزاويته (– ٩٠°) .

ء) تكبير مركزه نقطة الأصل ومعامله ٣ .



شكل (٦ – ٤٠)

[٥] استعن بالشكل (٦–٤٠) واكمل الآتي ، علماً بأن : أ ب جـ ء مربع ،

أ) صورة المثلث م أ ص بالانعكاس في $\overleftrightarrow{ك}$ هي ....

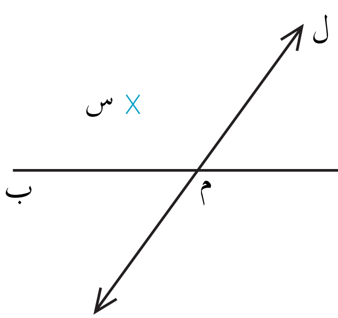
ب)صورة المثلث م ص ب بانسحاب مسافته |ب م| وفي اتجاه $\overleftarrow{ب ء}$ هي ...

جـ) صورة المثلث م ع ب بالدوران (م ، ٩٠°) هي ....

ء) صورة المثلث أ ص م بالتكبير (أ ، ٢) هي ....

هـ) المستقيم .... يمثل محور تناظر للمستطيل أ ص ﮈ ء .

و) الشكلان أ ص ﮈ ء ، ب ص ﮈ جـ متناظران حول المحور ....



شكل (٦ – ٤١)

[٦] انقل الشكل (٦ – ٤١)إلى دفترك ثم ارسم صورة $\overline{أ ب}$ تحت تأثير :

أ) انعكاس في المحور ل .

ب) انسحاب مسافته |م ب| وباتجاه $\overleftarrow{م ل}$.

جـ) ء (م ، ٤٥°) ء) ت (س ، ٢) .

[٧] في مستوى إحداثي ، ارسم Δ ا ب جـ الذي إحداثيات رؤوسه هي
ا (١ ، ٣) ، ب (٥ ، ٦) ، جـ (٤ ، −١) ، ثم أجب عما يلي :

ا) بين ان Δ ا ب جـ قائم الزاوية .

ب) أوجد إحداثيات نقطتي المنتصف للضلعين ا ب ، ا جـ ، سمِّهما ء ، هـ على الترتيب .

جـ) ما التحويل الهندسي الذي يجعل Δ ا ب جـ صورة للمثلث ا ء هـ؟

[٨] على مستوى إحداثي ، ارسم مربعاً طول ضلعه ٢ سم ، ثم :

ا) كبرّ أضلاعه إلى ثلاثة أمثالها ، كم تصبح مساحته ؟

ب) صغر أضلاعه إلى النصف ، كم تصبح مساحته ؟

(اعتبر مركز التكبير هي نقطة الأصل في كل حالة) .

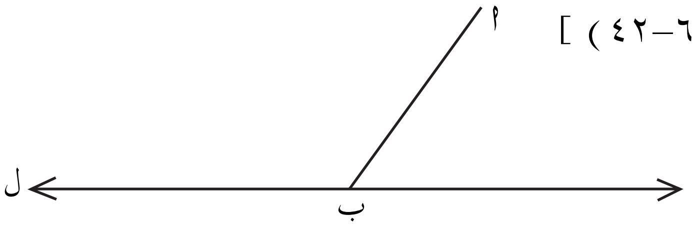
٦ : ٨ اختبار الوحدة

[١] إذا كانت : ؏ (١ ، –١) ، هـ (–٢ ، ٣) فأوجد :

أ) |؏ هـ| ب) إحداثيات نقطة منتصف $\overline{\text{؏ هـ}}$.

[٢] ارسم صورة $\overline{\text{أ ب}}$ بالانعكاس في $\overleftrightarrow{\text{ل}}$ ،

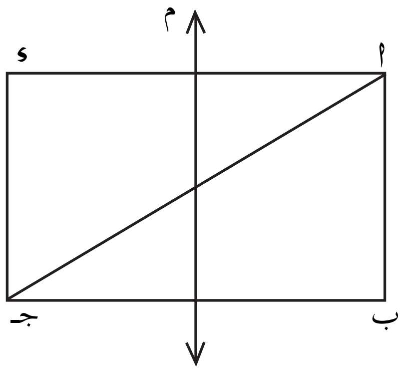
[انظر الشكل (٦–٤٢)]



شكل (٦ – ٤٢)

[٣] اذكر خواص الانعكاس في محور .

[٤] فـي الشكل (٦ – ٤٣) حدد أي من المستقيمان $\overleftrightarrow{\text{أ جـ}}$ ، $\overrightarrow{\text{م}}$ يعتبر محور تناظر للمستطيل أ ب جـ ؏.



شكل (٦ –٤٣)

[٥] في Δ أ ب جـ : |أ ب| = |أ جـ| ،

أ) ارسم صورة Δ أ ب جـ بانسحاب مسافته وحدتين وفي اتجاه $\overleftarrow{\text{ب جـ}}$ ، سمِّ المثلث الناتج $\text{أ}_1\,\text{ب}_1\,\text{جـ}_1$.

ب) هل $|\text{أ}_1\,\text{ب}_1| = |\text{أ}_1\,\text{جـ}_1|$ ؟ لماذا ؟

[٦] ارسم صورة المثلث الذي رؤوسه س (٣ ، ١)، ص (ـ١ ، ١)، ع (١ ، ٦)

تحت تأثير :

أ) ء (و ، ٩٠°) .

ب) ت (و ، ٢)

(اعتبر و هي نقطة الاصل في الحالتين) .

[٧] أكمل ما يلي : أ) الدوران يحفظ الأطوال ، ... ، ... .

ب) التكبير يحفظ قياس الزوايا ، ويكبر ...، ويحفظ... .

الوحـــدة السابعـــة

الإحصـــــاء

مقدمــة :

تعرفت في الصفوف السابقة على بعض الأساليب الخاصة بعرض البيانات الاحصائية كالجداول والأشكال البيانية ، وهي أساليب مهمة إلاّ أنها غير كافية أحياناً .

لذلك لابد لنا من أساليب أخرى تفيد في عرض وتلخيص البيانات الاحصائية وإِجراء المقارنات، من أبرز هذه الأساليب استخدام مقاييس إِحصائية لوصف وتحليل البيانات وأول أنواعها ما يسمى بمقاييس النزعة المركزية . وفي هذه الوحدة سنتعرف على المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال ، وهي كثيرة الاستعمال لوصف البيانات الإِحصائية في التطبيقات الحياتية المختلفة .

٧ : ١ المتوسط الحسابي

سبق وان تعرفت على كيفية حساب المتوسط الحسابي باستخدام العلاقة التالية :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع البيانات}}{\text{عددها}}$$

وكذلك على استخدامه للمقارنة ، فمثلاً : إِذا كان متوسط دخل اسرة هو (١٠٠٠٠) ريال في الشهر ومتوسط دخل أسرة أخرى هو (١٢٠٠٠) ريال في الشهر فنقول أن دخل الأسرة الثانية أعلى من دخل الأولى . وفي الصف الثامن تعرفت على كيفية حساب المتوسط الحسابي من جداول تكرار بسيطة .

وفي هذا الدرس سنتعمق في حساب المتوسط باستخدام جداول تكرار بسيطة بفئات وبدون فئات فمثلاً :

إذا كان لدينا الملاحظات التالية : $س_١$ ، $س_٢$ ، . . . ، $س_ﻫ$ فإِن المتوسط الحسابي يُعطى بالعلاقة التالية :

$$\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \cdots + س_ﻫ}{ﻫ}$$

حيث $س_١$ تعنى الملاحظة الأولى ، $س_٢$ الملاحظة الثانية . . . الخ ، (. . .) النقاط الثلاث تعني أن هناك ملاحظات أخرى ، أمّا $س_ﻫ$ فتعني الملاحظة الأخيرة التي رتبتها ﻫ ، وبالتالي فإِن عدد الملاحظات هو ﻫ .

ولتسهيل التعبير عن المجموع السابق،يُستخدم الرمز مجـ (ويُقرأ مجموع) للدلالة على المجموع ، أي عندما يكون لدينا (ﻫ) من الملاحظات ، فإِن :

$$\overline{س} = \frac{\underset{ر=١}{\overset{ﻫ}{مجـ}} س_ر}{ﻫ} .$$

مثال (١) عبّر عن المتوسط الحسابي بالرموز إِذا كان لدينا البيانات التالية :

$س_١$ ، $س_٢$ ، $س_٣$ ، $س_٤$ ، $س_٥$ ، $س_٦$ ، $س_٧$ ، $س_٨$.

الحـــل :

$$\overline{س} = \frac{س_١ + س_٢ + \cdots + س_٨}{٨} = \frac{\underset{ر=١}{\overset{٨}{مجـ}} س_ر}{٨}$$

مثال (٢)

لدينا البيانات التالية : ٢ ، ٦ ، ٤ ، ٣ ، ٥ ، ٩ ، ١٠ ، ١ ، ١٤ .

أولاً : عبر متوسطها الحسابي بالرموز . ثانياً : اوجد متوسطها الحسابي .

الحـــل :

أولاً : $\overline{س} = \frac{\sum_{ر=1}^{٩} س_ر}{ن} = \frac{س_١ + س_٢ + ... + س_٩}{٩}$

ثانياً : $\overline{س} = \frac{٢ + ٦ + ٤ + ٣ + ٥ + ٩ + ١٠ + ١ + ١٤}{٩}$

$\therefore \overline{س} = \frac{٥٤}{٩} = ٦$.

حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري بسيط

سبق وأن تعرفت على أن التوزيعات التكرارية البسيطة نوعان ، هما :

- توزيعات تكرارية بسيطة بدون فئات .
- توزيعات تكرارية بسيطة كفئات .

تذكر أن :

الفئة هي مجموعة من المشاهدات (الملاحظات) أو البيانات تبدأ بملاحظة تسمى الحد الأدنى للفئة وتنتهي بملاحظة تسمى الحد الأعلى للفئة .

طول الفئة = الحد الأعلى الحقيقي − الحد الأدنى الحقيقي .

أو هو الفرق بين الحد الأدنى لفئة والحد الأدنى للفئة التي تليها .

مركز الفئة = $\frac{\text{الحد الأدنى + الحد الأعلى}}{٢}$.

وحجم العينة هو مجموع التكرارات . الأمثلة التالية توضح كيفية حساب المتوسط الحسابي من خلال التوزيع التكراري البسيط .

أولاً : حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري بدون فئات :

مثال (٣) جدول التوزيع التكراري التالي يبين درجات امتحان ٢٠ طالبا في مادة الرياضيات [الدرجة العظمى (٢٠) درجة] :

الدرجة $س_ر$	التكـــرار $ك_ر$	الدرجة X التكرار $س_ر$ X $ك_ر$
١١	٢	٢٢
١٢	٣	٣٦
١٣	٥	٦٥
١٤	٢	٢٨
١٥	٣	٤٥
١٦	٢	٣٢
١٧	٢	٣٤
١٨	١	١٨
المجموع	٢٠ طالباً	٢٨٠ درجة

حيث $ك_ر$ تعني تكرار الدرجة $س_ر$. احسب المتوسط الحسابي للبيانات العددية السابقة .

الحـــل :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حواصل ضرب الدرجة X تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر}$$

وباستخدام المعلومات من الجدول السابق نحصل على :

$$\overline{س} = \frac{٢٨٠}{٢٠} = ١٤ \text{ درجة}$$.

وبصورة عامة :

إذا كان لدينا الملاحظات : $س_1$ ، $س_2$ ، ... ، $س_د$

لدينا التكــــرارات المناظــرة : $ك_1$ ، $ك_2$ ، ... ، $ك_د$

فإن المتوسط الحسابي يُعطى من العلاقة :

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع(حواصل ضرب الملاحظة} \times \text{تكرارها المناظر)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

ورمزياً :

$$\bar{س} = \frac{س_1 ك_1 + س_2 ك_2 + \cdots + س_د ك_د}{ك_1 + ك_2 + \cdots + ك_د} = \frac{\sum_{ر=1}^{د} س_ر ك_ر}{\sum_{ر=1}^{د} ك_ر}$$

ثانياً : حساب المتوسط الحسابي لتوزيع تكراري كفئات :

مثال (٤) اعتمد على جدول التكرار التالي ذي الفئات لإيجاد المتوسط الحسابي $\bar{س}$:

الفئــة	مركز الفئة $س_ر$	التكرار $ك_ر$	مركز الفئة × التكرار $س_ر \times ك_ر$
٣٠ – ٣٤	٣٢	٣	٩٦
٣٥ – ٣٩	٣٧	٦	٢٢٢
٤٠ – ٤٤	٤٢	١٠	٤٢٠
٤٥ – ٤٩	٤٧	٤	١٨٨
٥٠ – ٥٤	٥٢	٥	٢٦٠
٥٥ – ٥٩	٥٧	٢	١١٤
المجمـــوع		٣٠	١٣٠٠

الحــل :

من الجدول نجد أن عدد القيم س هو (٦) قيم ،

أي أن ن = ٦ .

$\therefore$ $\sum_{ر=١}^{٦}$ س$_ر$ك$_ر$ = س$_١$ك$_١$ + س$_٢$ك$_٢$ + س$_٣$ك$_٣$ + س$_٤$ك$_٤$ + س$_٥$ك$_٥$ + س$_٦$ك$_٦$

= ٣٢ × ٣ + ٣٧ × ٦ + ٤٢ × ١٠ + ٤٧ × ٤ + ٥٢ × ٥ + ٥٧ × ٢

= ٩٦ + ٢٢٢ + ٤٢٠ + ١٨٨ + ٢٦٠ + ١١٤ = ١٣٠٠ ،

مجموع التكرارات = $\sum_{ر=١}^{٦}$ ك$_ر$ = ك$_١$ + ك$_٢$ + ك$_٣$ + ك$_٤$ + ك$_٥$ + ك$_٦$

= ٣ + ٦ + ١٠ + ٤ + ٥ + ٢ = ٣٠

$\therefore$ $\bar{س}$ = $\frac{\sum_{ر=١}^{ن} س_ر ك_ر}{\sum_{ر=١}^{ن} ك_ر}$ = $\frac{١٣٠٠}{٣٠}$ = ٤٣,٣ (تقريباً) .

$\therefore$ حجم العينة في المثال السابق = ٣٠ .

مثال (٥)

فيمايلي عدد القطع التي انتجها (٢٠) عاملاً في أحد المصانع .

٣٥	٤٠	٣٧	٣٢	٣٣
٣٧	٣٣	٣٥	٢٠	٣٧
٤٠	٣٢	٣٥	٢٧	٣٧
٣٩	٣٧	٤٠	٢٥	٣٩

أ) كوّن جدولاً تكرارياً من القطع بدون فئات ثم أوجد المتوسط الحسابي للدرجات .

ب) كوّن جدولاً تكرارياً كفئات بحيث يكون طول الفئة (٦) ثم أوجد المتوسط الحسابي .

جـ) قارن بين المتوسطين في أ ، ب .

الحل :

أ)

الدرجات	٢٠	٢٥	٢٧	٣٢	٣٣	٣٥	٣٧	٣٩	٤٠	المجموع
التكرار	١	١	١	٢	٢	٣	٥	٢	٣	٢٠
القطعة X التكرار	٢٠	٢٥	٢٧	٦٤	٦٦	١٠٥	١٨٥	٧٨	١٢٠	٦٩٠

$$\text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حواصل ضرب القطعة X تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{٦٩٠}{٢٠} = ٣٤,٥ \text{ قطعة}$$

ب)

الفئات	٢٠ – ٢٥	٢٦ – ٣١	٣٢ – ٣٧	٣٨ – ٤٣	المجموع
مركز الفئة	٢٢,٥	٢٨,٥	٣٤,٥	٤٠,٥	
التكرار	٢	١	١٢	٥	٢٠
مركز الفئة X التكرار	٤٥	٢٨,٥	٤١٤	٢٠٢,٥	٦٩٠

$$\therefore \text{المتوسط الحسابي} = \frac{\text{مجموع (حاصل ضرب مركز الفئة X تكرارها)}}{\text{مجموع التكرارات}}$$

$$= \frac{٦٩٠}{٢٠} = ٣٤,٥ \ .$$

جـ) نلاحظ أن المتوسطين متساويان .

تمارين ومسائل

[١] اعتمد جدول التكرار التالي :

الملاحظة	٥	٤	٣	١	المجموع
التكرار	١	٤	٢	٣	١٠
الملاحظة X التكرار	٥	١٦	٦	٣	٣٠

أ) ما الملاحظة التي لها تكرار أكثر ؟ ب) أحسب المتوسط الحسابي .

[٢] الجدول التكراري التالي يبين علامات احد الصفوف في مادة الإحصاء (الدرجة العظمى ٢٠ درجة) .

الدرجة	٧	٩	١٠	١٢	١٤	١٥	١٧	١٨	المجموع
التكرار	٢	١	٢	٣	٢	٣	٤	٣	٢٠
الدرجة X التكرار									

أ) أكمل الجدول اعلاه . ب) ما الدرجة التي لها تكرار أكثر؟

جـ) احسب المتوسط الحسابي .

[٣] يمثُل الجدول التكراري التالي بيانات موزعة في جدول كفئات :

الفئات	١٠ –١٤	١٥ –١٩	٢٠ –٢٤	٢٥ –٢٩	المجموع
مركز الفئة	١٢	١٧	٢٢	٢٧	–
التكرار	٣	٧	١٢	٦	٢٨طالباً
مركز الفئة X التكرار	٣٦	١١٩	٢٦٤	١٦٢	٥٨١

أ) ما عدد الفئات . ب) ما حجم العينة ؟

جـ) أحسب المتوسط الحسابي .

[٤] الجدول التكراري التالي يمثل علامات صف في مادة الرياضيات في إِحدى المدارس :

الفئات	٢٠ – ٢٨	٢٩ – ٣٧	٣٨ – ٤٦	٤٧ – ٥٥	٥٦ – ٦٤	المجموع
مركز الفئة	٢٤	٣٣	٤٢	٥١	٦٠	–
التكرار	٥	٧	١٥	١٠	١٣	٥٠
مركز الفئة X التكرار						

أ) أكمل الجدول أعلاه .   ب) ما حجم العينة ؟

جـ) إِحسب المتوسط الحسابي .

[٥] أكمل الجدول التكراري التالي ، ثم أوجد المتوسط الحسابي .

الفئات	١٠ – ١٨	١٩ – ٢٧	٢٨ – ٣٦	٣٧ – ٤٥	المجموع
مركز الفئة					
التكرار	٥	٨	١٠	٧	٣٠
مركز الفئة X التكرار					

[٦] البيانات التالية تمثّل درجات الحرارة العظمى المسجلة خلال ٣٠ يوماً في مدينة صنعاء :

٢٧	٢٥	٢٢	٢٢	٢٤
٢٦	٢٢	٢٧	٢٥	٢٣
٢٤	٢٦	٢٥	٢٤	٢٢
٢٢	٢٣	٢٧	٢٢	٣٠
٢٤	٣٠	٢٤	٢٥	٢٣
٢٣	٢٦	٢٤	٢٩	٢٧

أ) كوّن جدولاً تكرارياً بدون فئات ، ثم أوجد المتوسط الحسابي .

ب) كوّن جدولاً تكرارياً كفئات بحيث يكون طول الفئة (٥) ثم أوجد المتوسط الحسابي .

جـ) قارن بين المتوسطين في أ ، ب .

٧ : ٢ المنـــــوال

يعتبر المنوال من اكثر مقاييس النزعة المركزية لسهولة في حسابه ، حيث يُعرّف كالتالي :

المنوال هو القِيـمة الأكثر تكراراً في البيانات الإحصائية.

حساب المنوال لتوزيع تكراري بدون فئات :

مثال (١) إذا كان لديك البيانات الآتية :

٨ ، ٨ ، ٩ ، ١١ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٢ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٥ ، ١٦
١٦ ، ١٧ ، ١٨ ، ١٩ ، ١٩ ، ١٩ .

فتلاحـظ أن (١٥) تكررت (٥) مـرات وهي أكثر البيانات تـكراراً ، وعلى هذا الأساس فإن المنوال هو (١٥) .

مثال (٢)

اعتبر البيانات التالية : ٧ ، ٩ ، ٢٥ ، ٢٦ ، ٣٢ ، ٤٨ ، والتي تلاحظ أن تكرارات هذه البيانات متساوية ، أي أن كل منها تكررت مرة واحدة ، وفي هذه الحالة ليس لها منوال أيّ عديمة المنوال .

مثال (٣) إذا كان لديك الدرجات التالية :

١٨ ، ١٨ ، ٢١ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٣ ، ٢٦ ، ٢٦ ، ٢٦ ، ٣١ ، ٣٥

تجد (٣) تكرارات للدرجة (٢٣) ومثلها للدرجة (٢٦) وهنا يمكن اعتبار كل منهما منوالاً أيّ إذا تساوت قيمتان من حيث تكرارهما يكون للقيم منوالين.

حساب المنوال لتوزيع تكراري كفئات :

في التوزيعات التكرارية ذات الفئات نستخدم التعريف التالي :

المنـــوال هو مركــز الفئــة ذات التكـــرار الأكبر .

مثال (٤) أوجد المنوال من جدول التوزيع التكراري التالي :

الفئات	١٠ –١٨	١٩ –٢٧	٢٨ –٣٦	٣٧ –٤٥
التكــرار	٥	٨	١٠	٧

الحــل :

نجد أن الفئة (٢٨ – ٣٦) لها أكبر تكرار (١٠) ، وبالتالي فإن المنوال هو مركز هذه الفئة ، أي أن المنوال = $\frac{٢٨ + ٣٦}{٢} = \frac{٦٤}{٢} = ٣٢$.

مثال (٥) أوجد المنوال للتوزيعات التكرارية التالية :

الفئات	٠ – ٥	٦ –١١	١٢ –١٧	١٨ –٢٣	٢٤ –٢٩	٣٠ –٣٥
التكــرار	٤	٥	٨	٧	٨	٣

الحــل : بما أن الفئتين (١٢–١٧)،(٢٤ – ٢٩) لهما التكرار نفسه .

∴ التوزيعات التكرارية لها منوالان ، هما :

المنوال الأول = $\frac{١٢ + ١٧}{٢} = \frac{٢٩}{٢} =$ ١٤,٥ ،

المنوال الثاني = $\frac{٢٤ + ٢٩}{٢} = \frac{٥٣}{٢} =$ ٢٦,٥ .

تمارين ومسائل

[١] أوجد المنوال لكل من المجموعات التالية :

أ) ٤ ، ٤ ، ٤ ، ٣ ، ٣ ، ٣ ، ٨ ، ٨ ، ٨ ، ٨

ب) ٣ ، ٨ ، ٩ ، ١٠ ، ٢ ، ٤ ، ٥

جـ) ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٩ ، ٦ ، ٤ ، ٤ ، ٤,٤ ، ٥

[٢] أوجد المنوال للتوزيعات التكرارية الآتية :

أ)

الفئات	التكرار
١٠ – ١٤	٤
١٥ – ١٩	٧
٢٠ – ٢٤	٨
٢٥ – ٢٩	٥
٣٠ – ٣٤	٣

ب)

الفئات	التكرار
١٠ – ١٤	٣
١٥ – ١٩	٩
٢٠ – ٢٤	٦
٢٥ – ٢٩	٩
٣٠ – ٣٤	٢

جـ)

الفئات	التكرار
١٠ – ١٤	٦
١٥ – ١٩	٦
٢٠ – ٢٤	٦
٢٥ – ٢٩	٦
٣٠ – ٣٤	٦

[٣] أوجد المنوال للتوزيع التكراري التالي ، ثم احسب المتوسط الحسابي :

الفئات	١٠ – ١٩	٢٠ – ٢٩	٣٠ – ٣٩	٤٠ – ٤٩	٥٠ – ٥٩
مركز الفئة	١٤,٥	٢٤,٥	٣٤,٥	٤٤,٥	٥٤,٥
التكرار	٣	٥	٨	١	٣

[٤] أوجد المنوال والمتوسط الحسابي لجدول التوزيعات التكرارية التالية :

الفئات	١٠ – ١٨	١٩ – ٢٧	٢٨ – ٣٦	٣٧ – ٤٥	٤٦ – ٥٤
التكرار	١	٥	٣	٨	٣

[٥] الجدول التالي يوضح غياب طلاب الصف التاسع في إحدى المدارس خلال العام الدراسي :

عدد أيام الغياب	٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧
التكرار	٧	١٥	٢٢	٢٤	١٧	١٠	٦	٣

أ) أوجد المتوسط الحسابي لعدد أيام الغياب .

ب) أوجد المنوال لعدد أيام الغياب .

٧ : ٣ التكرار المتجمع

سبق أن تعلمت في الصفين السابع والثامن كيفية تكوين جداول إحصائية بيانية وكذلك جداول تكرارية بسيطة بدون فئات وبفئات . كما تعرفت على بعض أساليب التمثيل البياني .

وهنا سوف تتعرف على كيفية تكوين جداول للتكرار المتجمع ، أي التكرار التراكمي ، وهو نوعان تصاعدي وتنازلي ، كما ستتعرف على كيفية رسم منحنى كل منهما .

مثال (١)

يبين الجدول التكراري التالي توزيع درجات اختبار شهري في الرياضيات لطلاب الصف التاسع . (درجته العظمى ٣٠ درجة) .

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكــرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢

كوّن جدولي التكرار المتجمع التصاعدي والتنازلي .

الحـــل :

أولاً : لتكوين الجدول التكراري المتجمع التصاعدي نفتح سطــراً ثالثاً فـــي الجدول السابق وذلك للتكرار المتجمع التصاعدي كما يلي :

أول تكرار = ١ ، ثاني تكرار = ١ + ١ = ٢ ، ثالث تكرار = ٢ + ٢ = ٤ ، رابع تكرار =٤ + ٨ = ١٢ ، . . . وهكذا ، فكل تكرار متجمع هو مجموع ذلك التكرار مع كل التكرارات السابقة،فيكون جدول التكرار المتجمع الصاعد هو :

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢
التكرار المتجمع الصاعد	١	٢	٤	١٢	٢١	٣٦	٤٨	٥٨	٦٢	

ملحوظة : التكرار المتجمع الصاعد لدرجة ما هو عدد الطلاب الحاصلين على تلك الدرجة أو على درجة أصغر منها .

ثانياً : لتكوين جدول التكرار المتجمع التنازلي ، نفتح سطـــراً ثالثاً للتكـــرار المتجمع التنازلي .

تعلم أن مجموع التكرارات في الجدول السابق هو ٦٢، هذه القيمة هي أول تكرار .

∴ أول تكـــرار = ٦٢ ، ثاني تكـــرار = ٦٢ – ١ = ٦١ ، ثالث تكرار = ٦١ – ١ = ٦٠ ، رابع تكرار = ٦٠ – ٢ = ٥٨ ، ... وهكذا ، فكل تكرار متجمع هو مجموع التكرارات كلها ناقصاً مجموع التكرارات السابقة .

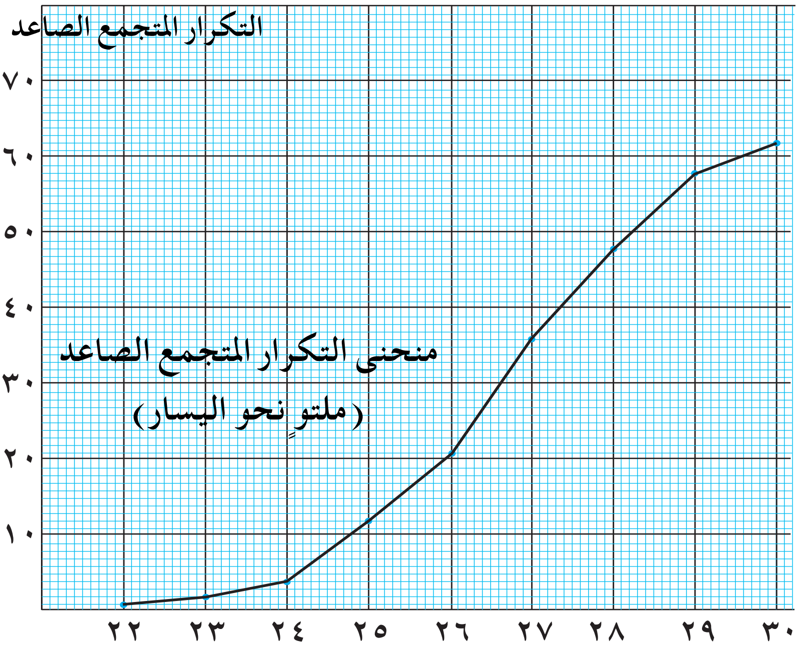
فيصبح جدول التكرار المتجمع النازل كالتالي :

الدرجات	٢٢	٢٣	٢٤	٢٥	٢٦	٢٧	٢٨	٢٩	٣٠	المجموع
التكرار	١	١	٢	٨	٩	١٥	١٢	١٠	٤	٦٢
التكرار المتجمع النازل	٦٢	٦١	٦٠	٥٨	٥٠	٤١	٢٦	١٤	٤	

ملحوظة : التكرار المتجمع النازل لدرجة ما هو عدد الطلاب الحاصلين على هذه الدرجة أو على درجة أكبر منها .

التمثيل البياني لجدولي التكرار المتجمع التصاعدي والتنازلي :

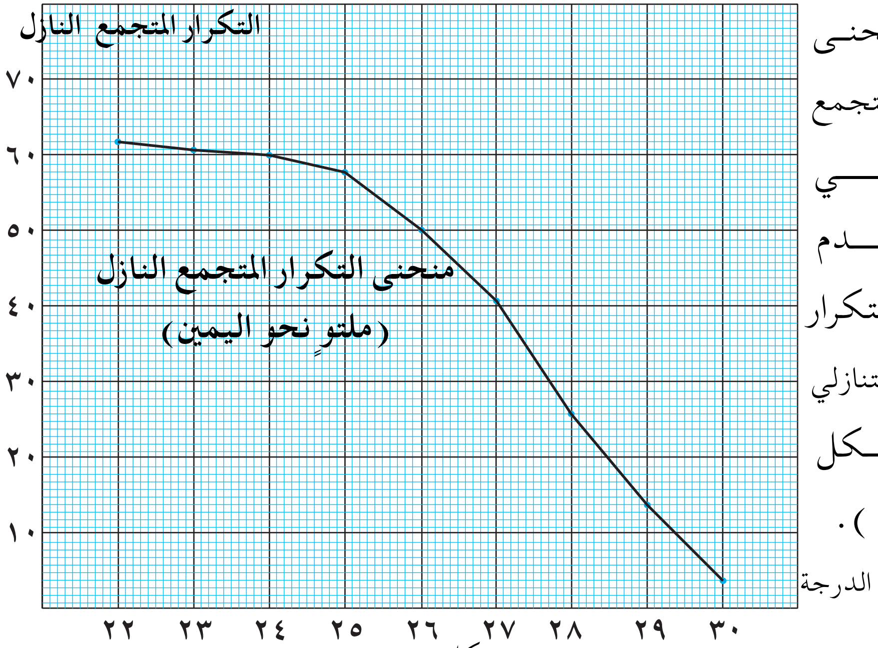
لرسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي نستخدم جدول التكرار المتجمع التصاعدي . انظر الشكل (٧ – ١)



الدرجة

شكل (٧ – ١)

لرسم منحنى التكرار المتجمع التنازلـــــي نستخـــــدم جدول التكرار المتجمع التنازلي انظر الشـكل (٧ – ٢).



شكل (٧ – ٢)

ملحوظة :

* يمكن تمثيل كل جدول تكراري (تصاعدي أو تنازلي) بيانياً منفرداً أو في رسم بياني واحد .

* كما أنه يمكن عمل جدول واحد يحتوي التكرارين المتجمعين التصاعدي والتنازلي .

تماريـن ومسائـل

[١] الجدول التكراري التالي يوضح درجات (٣٠) طالباً في اختبار شهري في مادة الرياضيات (الدرجة العظمى ٣٠ درجة) .

الدرجـة	٨	١١	١٤	١٧	٢٠	٢٣	المجموع
التكرار	٣	٦	١٠	٤	٥	٢	٣٠
التكرار المتجمع الصاعد	٣			٢٣			
التكرار المتجمع النازل	٣٠					٢	

أ) أكمل الجدول السابق.

ب) ارسم منحنى كل من التكرارين المتجمعين التصاعدي والتنازلي .

[٢] جدول التوزيع التكراري التالي يمثل درجات الصف التاسع في مادة العلوم في احد الاختبارات الشهرية : الدرجة العظمى (٥٠ درجة) .

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
١٠ –١٤		٤		
١٥ –١٩	١٧	٩		
٢٠ –٢٤		١٥		
٢٥ –٢٩		١٢		٤٢
٣٠ –٣٤		٢٠	٦٠	
٣٥ –٣٩		٧		
٤٠ –٤٤	٤٢	٣		
المجمـــوع		٧٠		

أ) أكمل الجدول أعلاه .

ب) ارسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي ومنحنى التكرار المتجمع التنازلي على الشكل نفسه .

جـ) ما النقطة التي يتقاطع عندها المنحنيان التصاعدي والتنازلي ؟

ء) أوجد المتوسط الحسابي .

[٣] الجدول التالي يوضح توزيعات التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل :

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٠ – ٤	٢	١	١	
٥ – ٩		٣		٤٩
١٠ – ١٤		٩		
١٥ – ١٩		٨		
٢٠ – ٢٤	٢٢	١٠		
٢٥ – ٢٩		١٢		
٣٠ – ٣٤		٤		
٣٥ – ٣٩	٣٧	٣	٥٠	
المجمـــوع		٥٠		

أ) أكمل الجدول أعلاه .

ب) ارسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي ومنحنى التكرار المتجمع التنازلي على الشكل نفسه .

جـ) ارسم عموداً من نقطة التقاطع على المحور الأفقي ، ما إحداثيات هذه النقطة ؟

د) أوجد المنوال .   هـ) إحسب المتوسط الحسابي .

[٤] بلغت أعمار (٣٠) عضواً ينتمون لنادٍ رياضي كما يلي :

١١	١٢	١٣	٢٠	٢١	١١	١٥	١٦	٣٠	٣٦
٢٢	٢٠	١٨	١٩	١٧	١٢	٢٠	٢٣	٢٧	٢٩
٢١	٢٥	٢٤	٢٣	٣١	٣٢	٣٥	٣٦	٣١	٣٠

الفئات	مركز الفئة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
١٠ـ ١٤				٣٠
			١٠	
	٢٧	٣		
٣٥ ـ٣٩		٣		
المجمـــوع		٣٠		

أ) أكمل الجدول (علماً بأن طول الفئة = ٥)

ب) ارسم التكرار المتجمع التصاعدي والتكرار المتجمع التنازلي .

جـ) أوجد المنوال .　　　　د) أوجد المتوسط الحسابي .

٧ : ٤　الوسيـــــط

البيانات التالية تمثل أوزان سبعة اطفال بالكيلوجرام ١٨ ، ٢١ ، ١٢ ، ١٩ ، ٢٥ ، ١٥ ، ١٦ وعند ترتيب هذه الأوزان تصاعدياً تكون : ١٢ ، ١٥ ، ١٦ ، ١٨ ، ١٩ ، ٢١ ، ٢٥ ، رتب هذه الأوزان تنازلياً .

تلاحظ أن القيمة ١٨ تتوسط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً لذا نسمى مثل هذه القيمة الوسيط ويُعرف كالتالي :

الوسيط لمجموعة من القيم هو القيمة التي تتوسط هذه القيم بعد ترتيبها تصاعدياً أو تنازلياً .

وللحصول على الوسيط نرتب القيم اما تصاعدياً أو تنازلياً ثم نأخذ القيمة التي تقع في الوسط تماماً إذا كان عدد القيم (ن) عدداً فردياً أما إذا كان عدد القيم (ن) عدداً زوجياً فإننا نأخذ متوسط القيمتين الوسطيتين لهذه القيم .

مثال (١) أوجد الوسيط للقيم الآتية :

أ) ٧٨ ، ٨٨ ، ٥٥ ، ٦٢ ، ٧٠ ، ٨٢ ، ٨٠

ب) ٣٢ ، ٢٨ ، ٢٥ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٠ ، ٣٨ ، ٢٢

الحـــل :

أ) ترتب القيم تصاعدياً كما يلي :

٥٥ ، ٦٢ ، ٧٠ ، ٧٨ ، ٨٠ ، ٨٢ ، ٨٨ لاحظ أن القيمة ٧٨ تتوسط القيم ، وذلك لأن عددها فردياً .

∴ الوسيط لهذه القيم = ٧٨

ب) نرتب القيم تصاعدياً كما يلي :

٢٢ ، ٢٥ ، ٢٨ ، ٣٠ ، ٣٢ ، ٣٤ ، ٣٥ ، ٣٨ نلاحظ أن القيمتين ٣٠ ، ٣٢ تتوسطان القيم ، وذلك لأن عددها زوجياً .

$$\therefore \text{الوسيط} = \frac{٣٠ + ٣٢}{٢} = \frac{٦٢}{٢} = ٣١ \ .$$

حساب الوسيط في التوزيعات التكراريه :

عندما يكون لدينا توزيعات تكرارية ، فإنه لايمكننا إيجاد الوسيط مباشرة لذلك علينا ان نتبع الخطوات التالية :

١) نكوّن جدولاً تكرارياً متجمعاً صاعداً أو نازلاً .

٢)نعين ترتيب الوسيط وهو $\frac{مجـ ك}{٢} = \frac{ن}{٢}$ سواء كانت(ن)فردية أو زوجية .

٣) نحدد الفئة الوسيطية التي تحتوي على ترتيب الوسيط .

٤) يتم حساب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة الآتية :

$$\textbf{الوسيط} = أ + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{١}}{ك_{٢}} \times ل$$

حيث : أ = الحد الأدنى الحقيقي للفئة الوسيطية

ن = التكرار الكلي

$ك_{١}$ = التكرار المتجمع التصاعدي للفئة السابقة للفئة الوسيطية

$ك_{٢}$ = تكرار الفئة الوسيطية .

ل = طول الفئة الوسيطية .

٥) يتم حساب الوسيط للتكرار المتجمع النازل من العلاقة الآتية :

$$\textbf{الوسيط} = ب - \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{٣}}{ك_{٢}} \times ل$$

حيث : ب = الحد الأعلى الحقيقي للفئة الوسيطية

ن = التكرار الكلي

$ك_{٣}$ = التكرار المتجمع التنازلي للفئة اللاحقة للفئة الوسيطية

$ك_{٢}$ = تكرار الفئة الوسيطية .

ل = طول الفئة الوسيطية .

مثال (٢) لدينا الجدول التكراري التالي :

الملاحظـــــة	التكـــرار
٥	٥
٤	١٠
٣	٢٠
٢	٢٥
١	٤٠
المجموع	١٠٠

أ) احسب الوسيط في حالة التكرار المتجمع التصاعدي .

ب) احسب الوسيط في حالة التكرار المتجمع التنازلي .

الحـــل :

١) نكوّن جدول التكرار المتجمع التصاعدي والتنازلي كما يلي :

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٥	٥	٥	١٠٠
٤	١٠	١٥	٩٥
٣	٢٠	$\boxed{٣٥}$ ك$_{١}$	٨٥
٢	$\boxed{٢٥}$ ك$_{٢}$	٦٠	٦٥
١	٤٠	١٠٠	$\boxed{٤٠}$ ك$_{٣}$
المجمـــــوع	١٠٠		

٢) ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢}$ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠ ويقع هذا الترتيب ضمن التكرار المتجمع التصاعدي (٦٠) وهذا يناظر الملاحظة (٢) وحيث ان ترتيب الوسيط يساوى ترتيب الفئة الوسيطية .

٣) الفئة الوسيطية هي (١,٥ – ٢,٥) حدها الأدنى الحقيقي ١,٥ وحدها الأعلى الحقيقي ٢,٥ وهي تناظر التكرار (٢٥) .

طول الفئة = ٢,٥ – ١,٥ = ١

٤) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = أ + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{١}}{ك_{٢}} \times ل$$

$$\text{الوسيط} = ١,٥ + \frac{\frac{١٠٠}{٢} - ٣٥}{٢٥} \times ١$$

$$= ١,٥ + \frac{١٥}{٢٥} \times ١$$

$$= ١,٥ + \frac{٣}{٥} = ١,٥ + ٠,٦ = ٢,١$$

٥) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع التنازلي من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = ب - \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{٣}}{ك_{٢}} \times ل$$

$$= ٢,٥ - \frac{\frac{١٠٠}{٢} - ٤٠}{٢٥} \times ١ = ٢,٥ - \frac{١٠}{٢٥}$$

$$= ٢,٥ - ٠,٤ = ٢,١$$

ملاحظة :

الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد هو نفسه للتكرار المتجمع النازل وبالتالي يمكن حسابه بواحدة فقط من هاتين الطريقتين .

مثال (٣)

من جدول التكرار الآتي أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد :

الفئـــات	التكـــرار
٣ – ٧	٢
٨ – ١٢	٣
١٣ – ١٧	١٠
١٨ – ٢٢	٥
٢٣ – ٢٧	٤
المجموع	٢٤

الحـل : ١) نكون جدول التكرار المتجمع الصاعد كما يلي :

الفئـات	التكـــرار	التكرار المتجمع الصاعد
٣ – ٧	٢	٢
٨ – ١٢	٣	$\boxed{٥}$ $ك_١$
١٣ – ١٧	$\boxed{١٠}$ $ك_٢$	١٥
١٨ – ٢٢	٥	٢٠
٢٣ – ٢٧	٤	٢٤
المجموع	٢٤	

٢) ترتيب الوسيط = $\frac{ن}{٢}$ = $\frac{٢٤}{٢}$ = ١٢ ويقع هذا الترتيب ضمن التكرار المتجمع التصاعدي (١٥) وهذا يناظر الفئة (١٣ – ١٧) .

٣) الفئة الوسطية هي (١٢,٥ –١٧,٥) حدها الأدنى ١٢,٥ وحدها الأعلى ١٧,٥ ، طول الفئة = ١٧,٥ – ١٢,٥ = ٥

٤) نحسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد من العلاقة :

$$\text{الوسيط} = أ + \frac{\frac{ن}{٢} - ك_{١}}{ك_{٢}} \times ل$$

$$\text{الوسيط} = ١٢,٥ + \frac{\frac{٢٤}{٢} - ٥}{١٠} \times ٥$$

$$= ١٢,٥ + \frac{٧}{١٠} \times ٥ = ١٢,٥ + \frac{٣٥}{١٠} = ١٢,٥ + ٣,٥ = ١٦$$

تدريب في المثال (٣) احسب الوسيط باستخدام التكرار المتجمع النازل

تأكد من أن قيمة الوسيط مطابقة للقيمة التي حصلت عليها بالنسبة للتكرار المتجمع الصاعد .

حساب الوسيط بيانياً :

يمكننا إيجاد الوسيط من خلال الرسم البياني وذلك باتباع الخطوات التالية :

– نرسم منحنى التكرار المتجمع التصاعدي مع منحنى التكرار المتجمع التنازلي ومن نقطة تقاطع هذين المنحنيين انزل عموداً على المحور الأفقي .

– نقطة تقاطع العمود مع المحور الأفقي هي الوسيط .

مثال (٤) أوجد الوسيط بيانياً باستخدام المعلومات الواردة في جدول التكرار التالي :

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٨	٣	٣	٣٠
١١	٦	٩	٢٧
١٤	١٠	١٩	٢١
١٧	٤	٢٣	١١
٢٠	٥	٢٨	٧
٢٣	٢	٣٠	٢
	٣٠		

الحل :

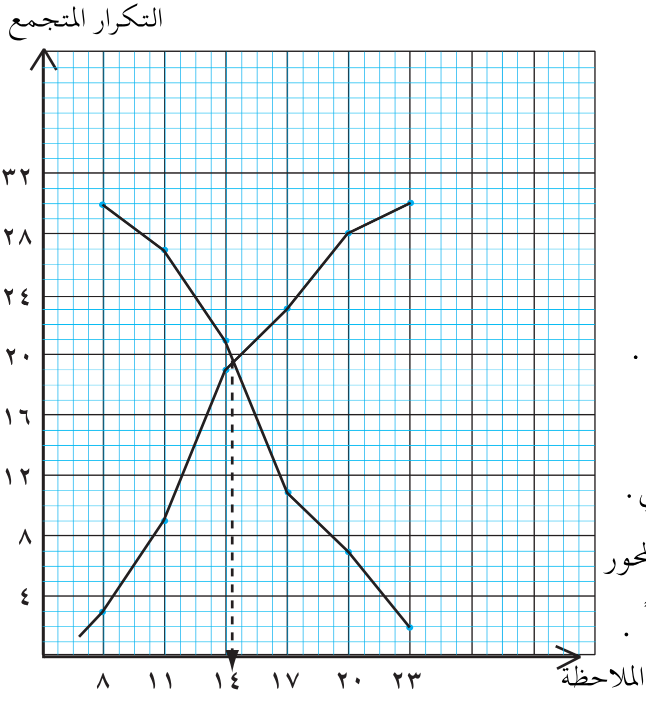
١) ارسم منحنى التكرار المتجمع الصاعد ومنحنى التكرار المتجمع النازل .

٢)عين نقطة تقاطع المنحنيين .

٣) انزل عموداً من نقطة تقاطع المنحنين على المحور الأفقي .

٤) نلاحظ أن العمود يقطع المحور الأفقي عند القيمة ١٤ تقريباً .

الوسيط ≈ ١٤ .



شكل (٧ –٣)

تدريب تحقق من صحة الاجابة جبرياً .

تمارين ومسائل

[١] أوجد الوسيط لكل من القيم التالية :

أ) ٤ ، ٧ ، ١٢ ، ٦ ، ٩

ب) ٣٧ ، ٢٨ ، ٦٥ ، ٤٢ ، ٣٩ ، ٤٦ ، ٣١

جـ) ١٢ ، ٨ ، ١٤ ، ١١ ، ١٧ ، ١٥

د) ٨٢ ، ٧٣ ، ٨٥ ، ٧٩ ، ٨١ ، ٧٥ ، ٩٢ ، ٩٥ .

[٢] إذا كانت أعمار خمسة أشخاص كما يلي :

٤٤ ، ٣٧ ، ٢٨ ، ٣٥ ، ٣٣ . أوجد الوسيط لهذه الأعمار .

[٣] أوجد الوسيط لجدول التكرار التالي باستخدام التكرار المتجمع الصاعد والتكرار المتجمع النازل ، وقارن بين الاجابتين .

الملاحظة	التكرار	التكرار المتجمع الصاعد	التكرار المتجمع النازل
٣٢	٣	٣	٣٠
٣٧	٦	٩	٢٧
٤٢	١٠	١٩	٢١
٤٧	٤	٢٣	١١
٥٢	٥	٢٨	٧
٥٧	٢	٣٠	٢
المجموع	٣٠		

[٤] لديك الجدول التكراري ذو الفئات التالية :

الفئات	٢ – ٥	٦ – ٩	١٠ – ١٣	١٤ – ١٧	المجموع
التكرار	٥	٤	٨	٣	٢٠
التكرار المتجمع الصاعد	٥	٩	١٧	٢٠	
التكرار المتجمع النازل	٢٠	١٥	١١	٣	

أ) أوجد الوسيط باستخدام التكرارين المتجمعين الصاعد والنازل .

ب) أوجد الوسيط بيانياً .

[٥] الجدول التالي يوضح درجات الحرارة المسجلة خلال خمسة وعشرين يوماً لمدينة الحوطة بلحج :

درجة الحرارة	٢٩	٣٢	٣٤	٣٥	٣٦	المجموع
التكرار	٣	٥	٧	٨	٢	٢٥
التكرار المتجمع الصاعد	٣	٨	١٥	٢٣	٢٥	
التكرار المتجمع النازل	٢٥	٢٢	١٧	١٠	٢	

أ) احسب الوسيط للتكرار المتجمع الصاعد .

ب) احسب الوسيط للتكرار المتجمع النازل .

جـ) أوجد الوسيط بيانياً . د) قارن بين الوسيطات الثلاثة .

٧ : ٥ تمارين ومسائل عامة

[١] أوجد المتوسط الحسابي والوسيط للقيم التالية :

أ) ١٧ ، ٢٦ ، ٣٢ ، ٢٢ ، ٢٧

ب) ٥٥ ، ٦٢ ، ٥٨ ، ٦٠ ، ٦٣ ، ٥٩

[٢] إذا كانت قيم المتغير س هي : ٨ ، ١١ ، ١٢ ، ١٤ ، ١٥

أ) أوجد قيمة المتوسط الحسابي وقيمة الوسيط للمتغير س .

ب) أوجد قيمة المتوسط الحسابي وقيمة الوسيط للمتغير س + ٣ .

[٣] أوجد المنوال لكل من الحالات الآتية :

أ) ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٨ ، ٥ ، ٩ ، ٥ .

ب) ١٤ ، ١٦ ، ١٣ ، ١٤ ، ١٤ ، ١٣ ، ١٥ ، ١٣ ، ١٧ .

جـ) ٢٦ ، ٣٢ ، ٢٤ ، ٢٧ ، ٢٩ .

[٤] الجدول التكراري التالي يبين علامات طلاب الصف التاسع في مادة العلوم
(الدرجة العظمى ٦٠ درجة) .

الدرجة	٢١	٢٧	٣٠	٣٦	٤٢	٤٥	٥٤	٥٦	المجموع
التكرار	٥	٨	٨	١٤	١٣	١٦	١٢	٤	٨٠
الدرجة X التكرار									

أ) أكمل الجدول التكراري اعلاه . ب) ما حجم العينة .
جـ) احسب المتوسط الحسابي . ء) أوجد المنوال لهذه الدرجات .
هـ) احسب الوسيط لهذه الدرجات .

[٥] البيانات التالية تمثل عدد الأشخاص الذين ارتادوا المكتبة خلال عشرة أيام :
١٣٢ ، ١٣٢ ، ١٣٥ ، ١٣٦ ، ١٤٠
١٤٢ ، ١٤٦ ، ١٣٥ ، ١٤٨ ، ١٥٠

أ) اكتب البيانات السابقة في جدول تكراري ثم احسب المتوسط الحسابي والوسيط لهذه البيانات .

ب) اكتب البيانات السابقة في جدول تكراري بشكل فئات بحيث يكون طول الفئة = ٤ ، ثم أوجد المتوسط الحسابي والوسيط لهذه البيانات .

جـ) قارن بين المتوسطين الحسابيين في أ، ب وكذلك بين الوسيطين في أ ،ب أيضاً .

[٦] الجدول التالي يوضح استهلاك الماء بالمتر المكعب لعشرين أسرة في مدينة الحديدة خلال شهرين فقط :

كمية الماء بالمتر المكعب	٣٠	٣٢	٣٣	٣٥	٣٨	المجموع
التكرار	٣	٥	٨	٢	٢	٢٠
التكرار المتجمع الصاعد						
التكرار المتجمع النازل						

أ) أكمل الجدول .

ب) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد .

جـ) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع النازل .

ء) أوجد الوسيط بيانياً . هـ) قارن بين الوسيطات الثلاثة السابقة.

[٧] البيانات التالية توضح عدد أفراد ٣٠ أسرة في محافظة اب :

٥ ، ٤ ، ١ ، ٥ ، ٦ ، ٣ ، ٧ ، ٩ ، ٣ ، ٤

٨ ، ٣ ، ٢ ، ٦ ، ٥ ، ٤ ، ٣ ، ٧ ، ٨ ، ٦

٤ ، ٧ ، ٣ ، ٦ ، ٧ ، ٥ ، ٤ ، ٥ ، ٨ ، ٩

أ)كوّن جدولاً تكرارياً للبيانات السابقة ، ثم أوجد المتوسط والوسيط والمنوال .

ب)كوّن جدولاً تكرارياً للبيانات السابقة بشكل فئات بحيث يكون طول الفئة = ٢ ، ثم أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد والمتوسط الحسابي .

جـ) أوجد الوسيط بيانياً .

٧ : ٦ اختبار الوحدة

[١] أوجد كلاً من المتوسط الحسابي والمنوال والوسيط لكل من القيم التالية :

أ) ٥ ، ٤ ، ٨ ، ٦ ، ١٣ ، ٥ ، ١١ ، ٥ ، ١٥

ب) ٣ ، ٥ ، ٣ ، ٩ ، ٣ ، ١٥ ، ٣ ، ٧

[٢] لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :

الملاحظة	١	٢	٣	٤	٥	المجموع
التكرار	٣	٥	٢	٣	٣	١٦
الملاحظة × التكرار	٣	١٠	٦	١٢	١٥	٤٦

أوجد : أ) المتوسط الحسابي . ب) المنوال .

[٣] لديك جدول التوزيع التكراري الآتي :

الفئات	٣ – ٥	٦ – ٨	٩ – ١١	١٢– ١٤	المجموع
مركز الفئة					
التكرار	٢	٦	٦	٣	١٧
مركز الفئة × التكرار					

أ) أكمل الجدول . ب) أوجد المنوال .

جـ) أوجد المتوسط الحسابي .

[٤] الجدول التالي يوضح درجات ٣٥ طالباً في مادة اللغة العربية :

الدرجة	٤	٥	٦	٧	٨	٩	١٠	المجموع
التكرار	٢	٣	٦	٩	٨	٥	٢	٣٥
التكرار المتجمع الصاعد								
التكرار المتجمع النازل								

أ) أكمل الجدول .

ب) أوجد الوسيط باستخدام التكرار المتجمع الصاعد .

جـ) أوجد الوسيط بيانياً . ء) قارن بين الوسيطين .

تم الكتاب بحمد الله

استبانة تقويم الكتاب

بيانات المستجيب:

الاسم/................................	المؤهل وتاريخه/................................	التخصص/................................
العمل الحالي /................................	المحافظة/................................	

بيانات الكتاب:

المادة/................................	الصف /................................	اسم الكتاب /................................
الجزء/................................	الطبعة................................	السنة الدراسية /................................
تاريخ تعبئة الاستبانة................................		

نهدف من هذه الاستبانة تقويم الكتاب بغرض تحسينه في الطبعات القادمة.
نرجو التكرم بوضع علامة (✓) تحت الوصف الذي تراه مناسباً لإجابتك أمام كل بند.

البنـــد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
أولاً- الأهداف:				
- وضوح الصياغة .				
- تقيس فكرة محددة .				
- يمكن قياسها .				
- شاملة (معرفية - مهارية - وجدانية) .				
ثانياً - المادة العلمية وأسلوب عرضها:				
- ملائمة لغة الكتاب لمستوى المتعلم .				
- سلامة ووضوح لغة الكتاب .				
- ترسيخ المحتوى للقيم الدينية والوطنية .				
- مادة الكتاب تكسب المتعلم خبرات جديدة .				
- ملامسة المادة لمشكلات المتعلم واهتماماته .				
- مادة الكتاب تساعد المتعلم على فهم المشكلات .				
- مادة الكتاب تراعي الفروق الفردية .				
- خلو الكتاب من التكرار في الموضوعات .				
- يراعي أسلوب عرض المادة الترابط والتسلسل المنطقي .				
- مراعاة مادة الكتاب للحداثة والدقة العلمية .				
- عرض المادة تحفز على القراءة والبحث والتفكير .				
- تحقيق المحتوى لأهداف المادة .				

البنـــد	جيد جداً	جيد	مقبول	ضعيف
ثالثاً - الوسائل التعليمية:				
- وضوحها ودقتها .				
- ارتباطها بموضوعات الدرس .				
- مدى ارتباطها بالأهداف .				
رابعاً -التقويم:				
- الأنشطة والتمارين تكسب المتعلم مهارات متنوعة .				
- بطاقات التفكير تثير دافعية البحث والإطلاع .				
- الأسئلة والتمرينات تقيس مدى تحقيق الأهداف .				
- مناسبة لمستوى المتعلم .				
- دقة ووضوح الصياغة .				
- تراعي الفروق الفردية .				
- متنوعة وشاملة للجوانب المعرفية .				
- تساعد المتعلم في تطبيق ما تعمله في مواقف الحياة المختلفة .				
- كفاية الأسئلة في مساعدة المتعلم على استيعاب مادة الكتاب .				
خامساً - الشكل والإخراج الفني:				
- ارتباط الغلاف بمحتوى الكتاب .				
- متانة تجليد الكتاب .				
- وضوح الألوان ومناسبتها .				
- وضوح ودقة الطباعة .				
- نوعية ورق الكتاب .				

أسئلة عامة، أجب بـ (نعم) أو (لا):

البنـــد	نعم	لا	
– ينسجم محتوى الكتاب مع نظام الفصلين الدراسيين .			
– عدد الحصص المقررة تكفي لا ستيعاب مادة الكتاب .			
– هل الوسائل التعليمية متنوعة وكافية ؟			
– هل هناك ضرورة لوجود قائمة بالمراجع ومصادر المعلومات ؟			
– هل هناك موضوعات ترى ضرورة حذفها (اذكرها) ؟			
– هل هناك موضوعات ترى ضرورة إضافتها (اذكرها) ؟			

إذا كان لديك ملاحظات أخرى اكتبها ....

....

....

....

....

قائمة الأخطاء العلمية واللغوية والمطبعية:

الخطأ	الصفحة	السطر	الصواب

نرجو التكرم بإرسال الاستبانة إلى

الإدارة العامة للمناهج

تيلفكس: ٥٤٠٣١٠ ـ ٥٤٥٧٩٩

أو إدارة المناهج

مكتب التربية بالمحافظة